Matematyka poziom spokojny

1. Wielomiany TEORIA

Jednomianem nazywamy funkcję określoną dla $x \in \boldsymbol{R}$, zapisaną w poniższej postaci.

$$y(x) = a \cdot x^n$$

- Liczbę $a \in \boldsymbol{R}$ nazywamy *współczynnikiem* jednomianu.
- Jeśli $a \neq 0$, to liczbę $n \in \boldsymbol{N}$ nazywamy *stopniem* jednomianu.
- Jeżeli $n = 0$, to otrzymujemy jednomian $y = a \cdot x^0$. Musimy jednak pamiętać, że działanie 0^0 jest nieokreślone; dlatego jednomian $y = ax^0$ nie może mieć jako dziedziny całego zbioru liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$. Przyjmijmy więc dla $n = 0$, w miejsce jednomianu stopnia zero, funkcję stałą $y(x) = a$ określoną dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$.
- Nie określamy stopnia jednomianu $y = 0 \cdot x^n$, czyli funkcji stałej $y = 0$.

Dwumianem nazywamy sumę dwóch jednomianów <u>różnych</u> stopni. Podobnie, *trójmianem* nazywamy sumę trzech jednomianów <u>różnych</u> stopni. Ogólnie *wielomianem* nazywamy sumę jednomianów, a stopniem całego wielomianu jest najwyższy stopień występującego w nim jednomianu.

Przykłady:

- $y = x^3 + 3x$ jest dwumianem trzeciego stopnia,
- $y = 2x^4 - 5$ jest dwumianem czwartego stopnia,
- $y = 4x^6 + 3x^2 - 1$ jest trójmianem szóstego stopnia.

Wielomiany zapisujemy w sposób uporządkowany, czyli zapisując sumę zaczynamy z lewej strony od jednomianu najwyższego stopnia, a dalej konsekwentnie zapisujemy jednomiany niższych stopni, aż do jednomianu najniższego stopnia po prawej stronie.

Zbierzmy te informacje w jedną definicję.

Funkcję określoną dla $x \in \boldsymbol{R}$ i wyrażoną wzorem

$$W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ \dots \ + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$ i $n \in \boldsymbol{N}$, nazywamy wielomianem stopnia *n*.

- Wyrażeniem $st(W) = n$ oznaczamy stopień wielomianu W.
- Funkcja stale równa zero, czyli $W(x) = 0$ jest wielomianem zerowym.
- Liczby a_n , a_{n-1} , … , a_1 nazywamy *współczynnikami wielomianu.*
- Współczynnik a_0 nazywamy *wyrazem wolnym.*

Suma wielomianów też jest wielomianem. Otrzymuje się ją grupując występujące w dodawanych wielomianach jednomiany tego samego stopnia.

Twierdzenie:

Jeśli wielomiany U, W i $U + W$ są niezerowe oraz $st(U) \leq st(W)$, to

$$st(U + W) \leq st(W).$$

Przykład: dodajemy dwa wielomiany P i Q:

$$P(x) = x^6 - x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x + 3$$

$$Q(x) = -x^6 + 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x - 11$$

Są to wielomiany stopni $st(P) = 6$ i $st(Q) = 6$.

Suma tych wielomianów:

$$R(x) = P(x) + Q(x) =$$

$$= x^6 - x^6 - x^5 + 3x^5 - 3x^4 + 5x^4 + 2x^3 - 2x^3 - 5x - 3x + 3 - 11 =$$

$$= (x^6 - x^6) + (-x^5 + 3x^5) + (-3x^4 + 5x^4) + (2x^3 - 2x^3) + (-5x - 3x) + (3 - 11)$$

Po dodaniu jednomianów tego samego stopnia oraz wyrazów wolnych otrzymujemy:

$$R(x) = 2x^5 + 2x^4 - 8x - 8$$

W tym przykładzie stopień wielomianu $st(R) = 5$ jest mniejszy od stopni dodawanych wielomianów P i Q, ponieważ suma jednomianów stopnia 6 wynosi zero ($x^6 - x^6 = 0$).

Iloczyn wielomianów też jest wielomianem. Otrzymuje się go mnożąc każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu.

Twierdzenie:

Iloczyn wielomianu stopnia m i wielomianu stopnia n jest wielomianem stopnia $m+n$.

$$st(U \cdot W) = st(U) + st(W).$$

Przykład: mnożymy dwa wielomiany R i S:

$$R(x) = 5x + 3$$

$$S(x) = 2x^3 - 3x - 1$$

Są to wielomiany stopni: $st(R) = 1$ i $st(S) = 3$.

Iloczyn tych wielomianów $T(x) = R(x) \cdot S(x)$

$$T(x) = (5x + 3)(2x^3 - 3x - 1) = 5x(2x^3 - 3x - 1) + 3(2x^3 - 3x - 1) =$$

$$= (10x^4 - 15x^2 - 5x) + (6x^3 - 9x - 3) = 10x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 14x - 3$$

Stopień wielomianu $st(T) = 4$ jest równy sumie stopni mnożonych wielomianów.

$$st(R) + St(S) = 1 + 3 = 4$$

Rozkład wielomianu na czynniki.

Twierdzenie (nazywane „podstawowym twierdzeniem algebry”):

Każdy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników **stopnia co najwyżej drugiego.**

Rozkład wielomianu W na czynniki można wykorzystać do wyznaczenia jego *pierwiastków*, czyli takich argumentów x , dla których równanie $W(x) = 0$ jest spełnione.

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków. W jakim przypadku liczba pierwiastków może być mniejsza od n ? Ma to miejsce, gdy w rozkładzie wielomianu na czynniki pojawi się czynnik stopnia drugiego, który nie ma miejsc zerowych; np. $x^2 + 2$.

Przykład: znajdujemy pierwiastki wielomianu $W(x) = 2x^5 + 2x^4 - 8x - 8$.

Rozkładamy ten wielomian na czynniki stosując grupowanie wyrazów i korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$W(x) = 2x^5 + 2x^4 - 8x - 8 = 2x^4(x + 1) - 8(x + 1) = 2(x + 1)(x^4 - 4)$$

$$= 2(x + 1)(x^2 - 2)(x^2 + 2) = 2(x + 1)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)(x^2 + 2)$$

Trzy pierwiastki wielomianu $W(x)$ stopnia piątego to: $x = -1,\ x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$.