



www.matpanda.pl

Matematyka poziom spokojny

7. Funkcje wymierne TEORIA

Funkcję wyrażoną wzorem $y = \frac{a}{x}$ nazywamy *proporcjonalnością odwrotną*, w której :

- argument funkcji x jest liczbą rzeczywistą większą od zera,
- liczbę $a > 0$ nazywamy *współczynnikiem proporcjonalności*,
- wielkości x i y nazywamy *odwrotnie proporcjonalnymi*.

Zależność proporcjonalności odwrotnej pomiędzy wielkościami x i y można też zapisać w postaci $x \cdot y = a$. Założyliśmy, że zarówno zmienna x jak i stała a są liczbami rzeczywistymi większymi od zera; wtedy także y będzie liczbą rzeczywistą większą od zera.

Przykład:

Częstotliwość f fali radiowej i długość tej fali λ są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Długość fali jest najmniejszą odległością pomiędzy dwoma punktami o tej samej fazie drgań; $\lambda = \frac{c}{f}$, gdzie c jest stałą oznaczającą szybkość światła $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jednostką częstotliwości jest $1 \text{ Hz} = \frac{1}{\text{s}}$ (odwrotność sekundy).

Obliczmy długość fali, której częstotliwość jest równa 300 kHz.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]}{300 \text{ [kHz]}} = \frac{3 \cdot 10^8}{300 \cdot 10^3} \left[\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{1}{\text{s}}} \right] = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} [\text{m}] = 1 \cdot 10^{8-5} [\text{m}] = 10^3 [\text{m}] = 1 [\text{km}]$$

Obliczmy długość fali, której częstotliwość jest równa 100 MHz.

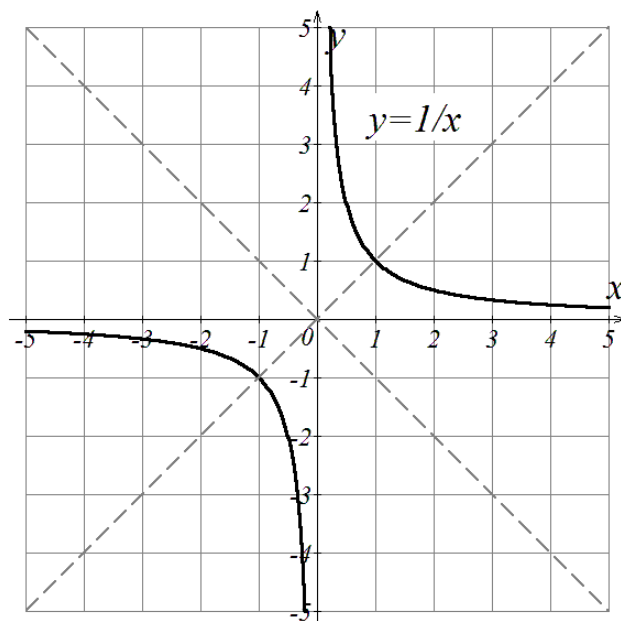
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]}{100 \text{ [MHz]}} = \frac{3 \cdot 10^8}{100 \cdot 10^6} \left[\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{1}{\text{s}}} \right] = \frac{3 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^8} [\text{m}] = 3 \cdot 10^{8-8} [\text{m}] = 3 \cdot 10^0 [\text{m}] = 3 [\text{m}]$$

Wykres funkcji $y = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy *hiperbolą*.

Zakładamy, że zarówno zmienna x jak i stała a są liczbami rzeczywistymi różnymi od zera (czyli mogą przyjmować wartości dodatnie lub ujemne i tym różni się funkcja hiperboliczna od przedstawionej na poprzedniej stronie funkcji proporcjonalności odwrotnej).

Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ (przyjmijmy, że dla $a > 0$) ma następujące własności:

- jest określona dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
- dla $x < 0$ przyjmuje wartości ujemne,
- dla $x > 0$ przyjmuje wartości dodatnie,
- nie ma miejsc zerowych,
- jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$,
- jest malejąca w przedziale $(0, \infty)$,
- dla x dążącego do $-\infty$ i do ∞ wykres funkcji „zbliża się” do osi OX , którą nazywamy *asymptotą poziomą*,
- dla x przyjmującego wartości bliskie 0 wykres funkcji „zbliża się” do osi OY , którą nazywamy *asymptotą pionową*.



Proste $y = x$ i $y = -x$ są *osiąmi symetrii* wykresu hiperboli $y = \frac{a}{x}$.

Punkt $(0, 0)$ jest *środkiem symetrii* wykresu hiperboli $y = \frac{a}{x}$.

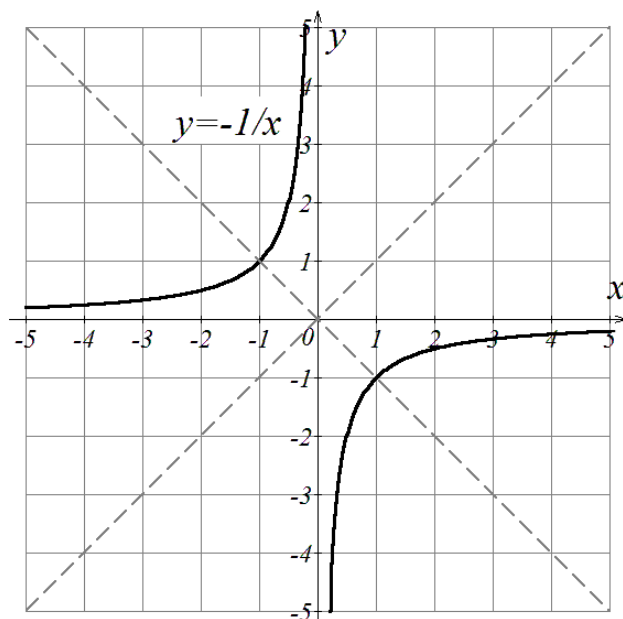
W kolejnych kilku krokach pokazane będą przekształcenia funkcji hiperbolicznej, takie jak przyjęcie ujemnej wartości stałej a (na przykład $a = -1$), przyjęcie wartości stałej a większej od 1 (na przykład $a = 5$) oraz z zakresu $0 < a < 1$ (na przykład $a = \frac{1}{5}$). Kolejnymi przekształceniami będą przesunięcia funkcji wzdłuż osi odciętych (OX) i osi rzędnych (OY).

Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy odbijając symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $y = f(x)$.

Tak powstał pokazany obok wykres funkcji

$$y = -\frac{1}{x}.$$

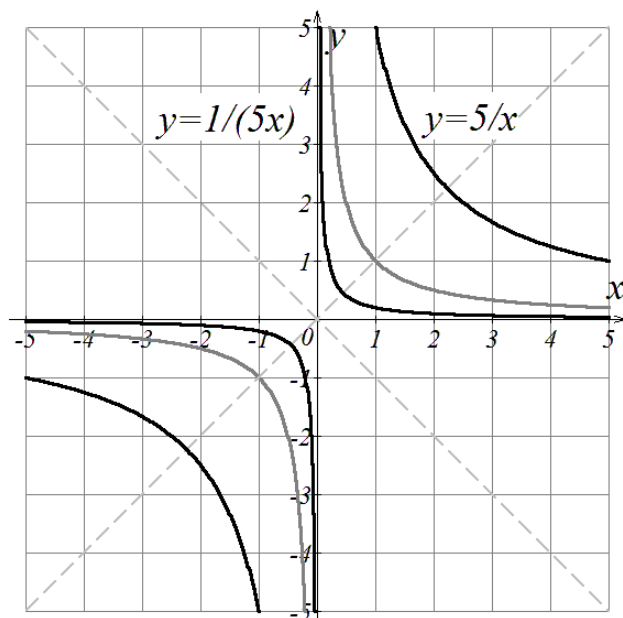
Funkcja ta jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz jest rosnąca w przedziale $(0, \infty)$.



Rysunek obok ilustruje wpływ parametru a na kształt wykresu funkcji $y = \frac{a}{x}$.

Wykres funkcji $y = \frac{5}{x}$ jest „mniej stromy”

od wykresu funkcji $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{5x}$.



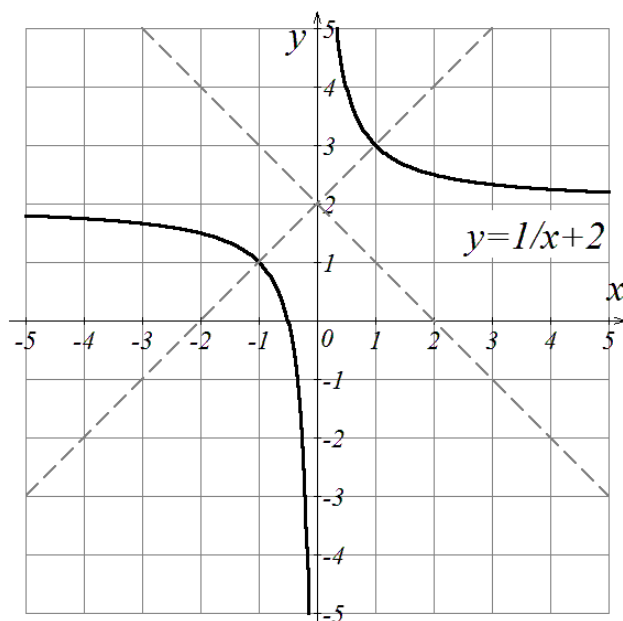
Wykres funkcji $y = \frac{1}{x} + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu hiperboli $y = \frac{1}{x}$

o dwie jednostki w górę wzdłuż osi OY .

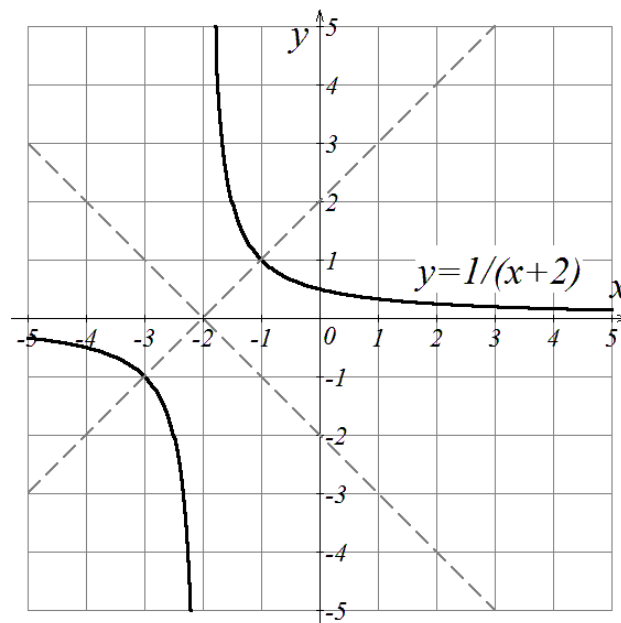
Asymptotą poziomą jest prosta $y = 2$.

Ośiami symetrii wykresu funkcji są proste

$y = x + 2$ oraz $y = -x + 2$.



Wykres funkcji $y = \frac{1}{x+2}$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu hiperboli $y = \frac{1}{x}$ o dwie jednostki w lewo wzdłuż osi OX . Funkcja jest określona dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Asymptotą pionową funkcji jest prosta przechodząca przez punkt $(-2, 0)$. Ośiami symetrii wykresu funkcji są proste $y = x + 2$ oraz $y = -x - 2$.



Funkcją *wymierną* nazywamy iloraz dwóch wielomianów.

$$f(x) = \frac{V(x)}{W(x)}$$

Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych takich, że miejsca zerowe wielomianu z mianownika nie należą do dziedziny funkcji (wielomian $W(x) \neq 0$ dla x należących do dziedziny funkcji).

Rozważmy wyrażenie wymierne, którego licznikiem jest funkcja liniowa $ax + b$, a mianownik to wielomian stopnia drugiego zapisany w postaci iloczynowej $(x + c)(x + d)$.

$$\frac{ax + b}{(x + c)(x + d)}$$

Przedstawimy to wyrażenie wymierne w postaci *ułamków prostych*, czyli wyznaczmy takie liczby A i B , by spełniona była poniższa równość (oczywiście dla: $x + c \neq 0$ i $x + d \neq 0$).

$$\frac{ax + b}{(x + c)(x + d)} = \frac{A}{x + c} + \frac{B}{x + d}$$

Przykład:

Zapiszmy wyrażenie wymierne $\frac{3x-5}{x^2+6x+5}$ w postaci sumy ułamków prostych.

Przekształcamy wielomian w mianowniku do postaci iloczynowej i zapisujemy wyrażenie wymierne jako sumę ułamków prostych z licznikami A i B . Nasze zadanie sprowadza się teraz do wyznaczenia tych liczników.

$$\frac{3x-5}{x^2+6x+5} = \frac{3x-5}{(x+1)(x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+5}$$

Sumę ułamków prostych sprowadzamy do wspólnego mianownika.

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x+1)}{(x+1)(x+5)} = \frac{(A+B)x + 5A + B}{(x+1)(x+5)}$$

Liczby A i B wyznaczamy z porównania liczników obu wyrażeń wymiernych.

$$(A+B)x + 5A + B = 3x - 5$$

Osobno porównujemy współczynniki przy zmiennej x i wyrazy wolne.

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 5A+B=-5 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i wyznaczamy liczby A i B .

$$\begin{cases} A=-2 \\ B=5 \end{cases}$$

Zatem:

$$\frac{3x-5}{x^2+6x+5} = \frac{-2}{x+1} + \frac{5}{x+5}$$

Przykład:

Wykonajmy działanie dodawania wyrażeń wymiernych: $\frac{x}{x+5} + \frac{2-3x}{3x-1}$.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-5, \frac{1}{3}\}$. Działania na wyrażeniach wymiernych wykonujemy w podobny sposób, jak działania na liczbach wymiernych zapisanych w postaci ułamków. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest wyrażenie:

$$(x+5)(3x-1).$$

Upraszczamy wyrażenie w liczniku.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+5} + \frac{2-3x}{3x-1} &= \frac{x(3x-1) + (2-3x)(x+5)}{(x+5)(3x-1)} = \\ &= \frac{3x^2 - x + 2x + 10 - 3x^2 - 15x}{(x+5)(3x-1)} = \frac{-14x + 10}{(x+5)(3x-1)} \end{aligned}$$

Przykład:

Wyznaczmy współrzędne punktów wspólnych hiperboli $y = \frac{2x+2}{x-1}$ i prostej $y = x + 1$.

Zakładamy, że $x \neq 1$ (mianownik wyrażenia wymiernego musi być różny od 0).

Rozwiązujemy równanie $\frac{2x+2}{x-1} = x + 1$.

$$\frac{2x+2}{x-1} = x+1 \quad / \cdot (x-1)$$

$$2x+2 = (x+1)(x-1)$$

$$2x+2 = x^2 - 1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Wyróżnik równania kwadratowego $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$.

Pierwiastkami równania kwadratowego są:

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{2-4}{2} = -1$$

oraz

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{2+4}{2} = 3$$

Z równania prostej $y = x + 1$ wyznaczamy $y_1 = 0$ oraz $y_2 = 4$.

Hiperbola i prosta przecinają się w punktach $(x_1, y_1) = (-1, 0)$ i $(x_2, y_2) = (3, 4)$.

