www.matpanda.pl

Matematyka
poziom spokojny

7. Funkcje wymierne
ZADANIA

ZADANIA ZAMKNIĘTE

7.1. (1 punkt)

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right)$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań.

Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.	P	F
2.	Wyrażenie $W(x)$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{2x}{x^2-1}$.	P	F

$W(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right) = \dots$

$x-1 \neq 0 \;/+1$ i $x+1 \neq 0 \;/-1$

$x \neq 1$ i $x \neq -1$

$a^2 - b^2 = \dots$

$(a+b)^2 = \dots$

$(a-b)^2 = \dots$

$\dots = \frac{1}{2}\left(\frac{(x+1)(x+1) - (x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2-1} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}-\cancel{x^2}+2x-\cancel{1}}{x^2-1} =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}x}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}$

7.2. (1 punkt)

Rozwiązaniem równania $\frac{x-5}{x+3} = \frac{2}{3}$ jest liczba

a) 21 b) 7 c) $\frac{17}{3}$ d) 0

$$\frac{x-5}{x+3} = \frac{2}{3}$$

$$2(x+3) = 3(x-5)$$

$$2x + 6 = 3x - 15 \quad / -2x + 15$$

$$6 + 15 = 3x - 2x$$

$$21 = x$$

$$x = 21$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

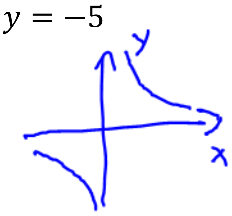
$$\boxed{a \cdot d = b \cdot c}$$

7.3. (1 punkt)

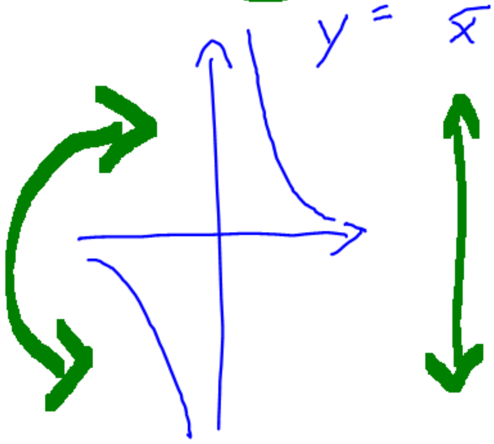
Wykres funkcji $f(x) = \frac{-5}{x}$ nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu

a) $y = -5x$ b) $y = -5$ c) $x = -5$ d) $y = 5x$

$y = \frac{1}{x}$ →



$y = \frac{5}{x}$ →



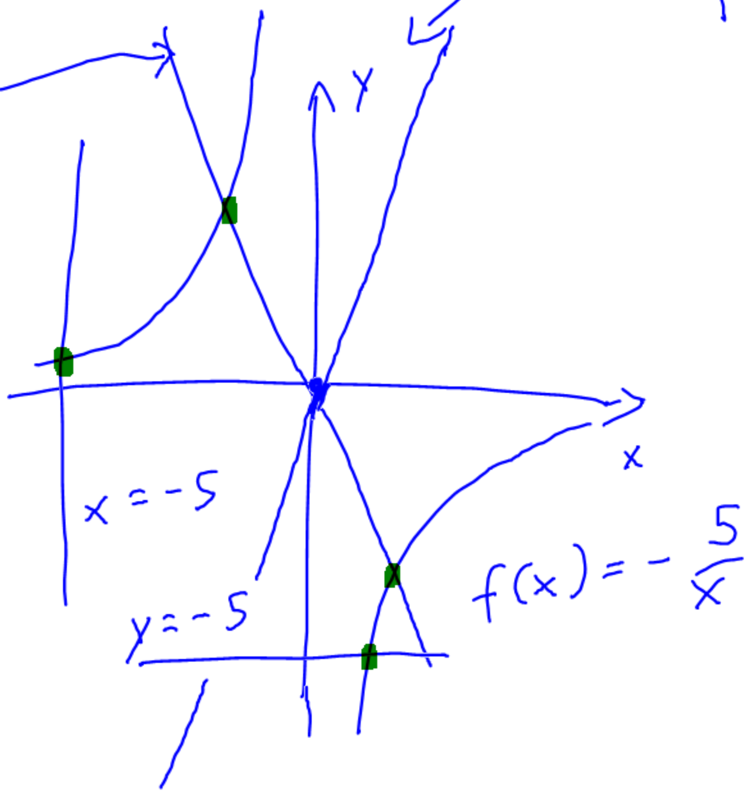
$y = \frac{5}{x}$

$\boxed{f(x) = -\frac{5}{x}}$

$y = -5x$

↑

$y = -5$



$\boxed{y = 5x}$

7.4. (1 punkt)

Dodatnie liczby x i y spełniają warunek $2x = 3y$.

Wynika stąd, że wartość wyrażenia $\frac{x^2+y^2}{x \cdot y}$ jest równa

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{13}{6}$ c) $\frac{6}{13}$ d) $\frac{3}{2}$

$y = ?$

$2x = 3y \quad /:3$

$\frac{2}{3}x = y$

$\to y = \frac{2}{3}x$

$$\frac{x^2+y^2}{x \cdot y} = \frac{x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2}{x \cdot \frac{2}{3}x} = \frac{x^2 + \frac{4}{9}x^2}{\frac{2}{3}x^2} = \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{4}{9}\right)}{\frac{2}{3}\cancel{x^2}} =$$

$$= \frac{1\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{13}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{13}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{2} = \frac{13}{3 \cdot 2} = \frac{13}{6}$$

ZADANIA OTWARTE

7.5. (2 punkty)

Dane są dwie liczby x i y, takie, że iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x+y}{x}$. Wynik podaj bez niewymierności w mianowniku.

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$ad = bc$$

$$2x = (1+\sqrt{5})y \quad / :2$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot y$$

$$\frac{x+y}{x} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}y + y}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}y} = \frac{\cancel{y}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cancel{y}} = \frac{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1\cancel{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{1\cancel{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \boxed{\underbrace{a^2-b^2}_{\dots} =}$$

$$= 1 + \frac{2\cdot 1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{\underbrace{1+\sqrt{5}}} = \frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$$

$$(a+b)(a-b)$$

$$= \frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{1-5} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{-\cancel{2}^{1}(1+\sqrt{5})}{-\cancel{4}_{2}} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

7.6. (2 punkty)

Rozwiąż równanie

$$\frac{(4x+1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)} = 0$$

Dla jakich x to ma sens?

$2x - 10 \neq 0$, $x + 3 \neq 0 \quad / -3$

$2x \neq 10 \quad /:2$, $\boxed{x \neq -3}$

$\boxed{x \neq 5}$

$4x + 1 = 0 \quad / -1$ lub $x - 5 = 0$

$4x = -1 \quad /:4$ $\quad \cancel{\boxed{x_2 = 5}}$

$\boxed{x_1 = -\frac{1}{4}}$

Rozwiązaniem równania jest $x_1 = -\frac{1}{4}$.

7.7. (3 punkty)

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji h, określonej dla $x \neq 0$ wzorem

$$h(x) = \frac{a}{x}.$$

Wiadomo, że do wykresu funkcji h należy punkt $P = (2, 5)$.

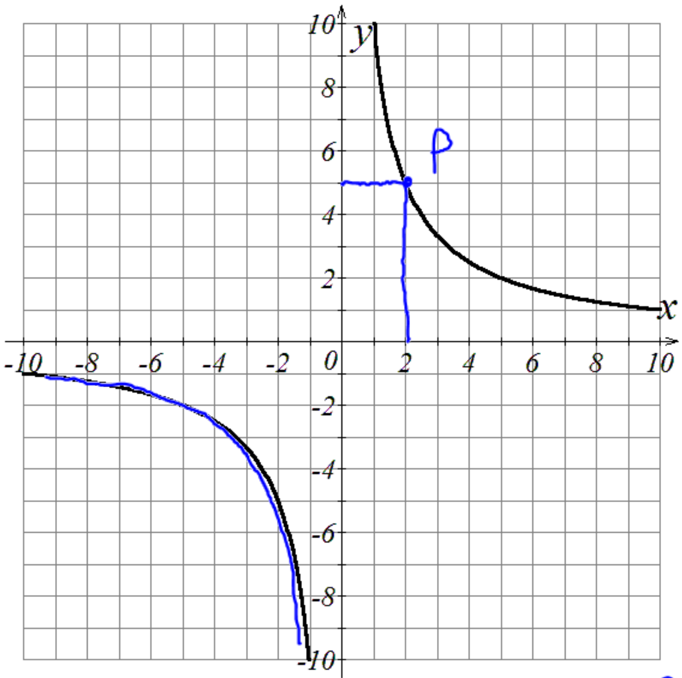
- Oblicz wartość współczynnika a .
- Ustal, czy liczba $h(\pi) - h(-\pi)$ jest dodatnia czy ujemna.
- Rozwiąż nierówność $h(x) > 5$.

$5 = \frac{a}{2} \quad / \cdot 2$

$10 = a$

$a = 10$

$\boxed{h(x) = \frac{10}{x}}$



$h(\pi) - h(-\pi) =$

$= \frac{10}{\pi} - \frac{10}{-\pi} = \frac{10}{\pi} + \frac{10}{\pi} = \frac{10+10}{\pi} = \frac{20}{\pi} > 0$

$\frac{10}{x} > 5$ Dla $x < 0$ $h(x) < 0 < 5$.

Szukam więc rozwiązań tylko dla $x > 0$.

$\frac{10}{x} > 5 \quad / \cdot x$

$10 > 5 \cdot x \quad / : 5$

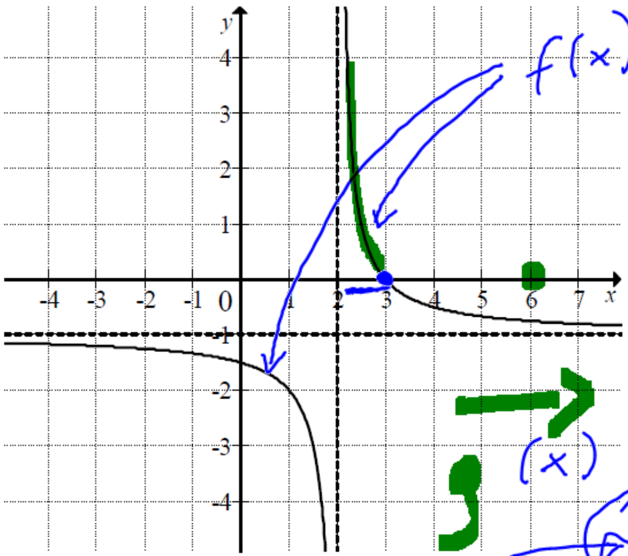
$\frac{10}{5} > x$, $x < 2 \Rightarrow$

Rozwiązanie:

$2 > x > 0$

7.8. (2 punkty)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f, który powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji określonej wzorem $y = \frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.



$f(x)$

$g(x)$

3

a) Odczytaj z wykresu i zapisz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od 0.

b) Podaj miejsce zerowe funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(x-3)$.

a) $x \in (2, 3)$

$f(x-3) \rightarrow$

$f(x+3) \leftarrow$

$f(x)-3 \downarrow$

$f(x)+3 \uparrow$

b) $g(x) = f(x-3)$

Miejsce zerowe $f(x)$ to było $x = 3$

$\xrightarrow{3}$

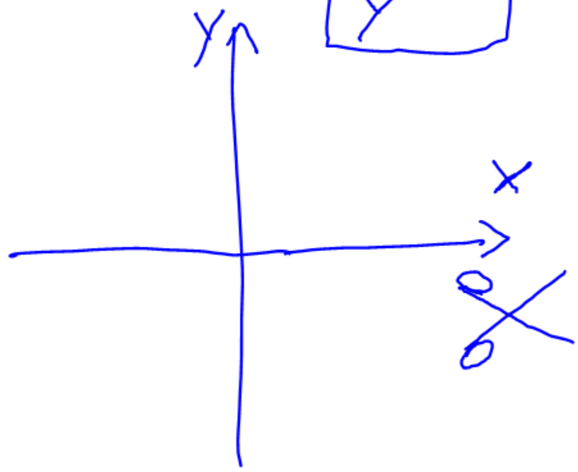
To miejsce zerowe $g(x)$ $x = 3+3 = 6$

7.9. (3 punkty)

Znajdź współrzędne tych punktów należących do wykresu funkcji $\boxed{f(x) = \frac{20}{x}}$, $f(x) = y$,

których rzędna jest o 1 większa od odciętej.

$\underbrace{\text{rzędna}}_{y}$, $\underbrace{\text{odciętej}}_{x}$



$$y = x + 1$$

$$\frac{20}{x} = x + 1 \quad / \cdot x$$

$$\cancel{x} \cdot \frac{20}{\cancel{x}} = x(x+1)$$

$$20 = x^2 + x \quad / -20$$

$$0 = x^2 + x - 20$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 1 + 80 = 81$$

$$\sqrt{\Delta} = 9$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-9}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+9}{2} = 4$$

$$y_1 = \frac{20}{x_1} = \frac{20}{-5} = -4$$

$$y_2 = \frac{20}{x_2} = \frac{20}{4} = 5$$

Punkty to: $P_1 = (-5, -4)$, $P_2 = (4, 5)$.

7.10. (3 punkty)

Dane są funkcje $f(x) = \frac{2}{x} - 1$ i $g(x) = \frac{2-x}{x-2}$.

Określ zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > g(x)$.

$f(x) > g(x)$

$\frac{2}{x} - 1 > \frac{2-x}{x-2}$, $x \neq 0$ i $x - 2 \neq 0 \quad / +2$

$x \neq 2$

$\frac{2}{x} - 1 > -\frac{-2+x}{x-2}$

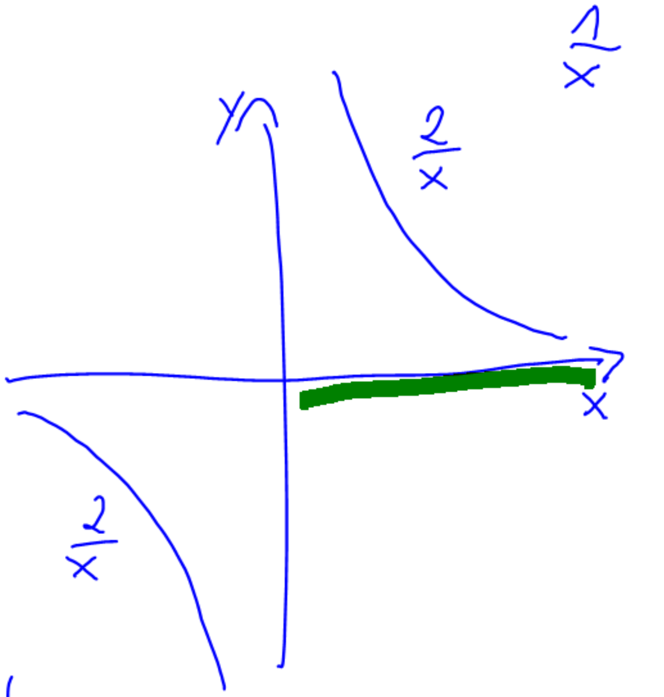
$\frac{2}{x} - 1 > -\frac{\cancel{x-2}^{\,1}}{\cancel{x-2}_{\,1}}$

$\frac{2}{x} - 1 > -1 \quad / +1$

$\frac{2}{x} > -1 + 1$

$2 > 0$

$\boxed{\frac{2}{x} > 0}$



$\boxed{x > 0}$ i $\boxed{x \neq 2}$

$\boxed{x \in (0, 2) \cup (2, \infty)}$

7.11. (5 punktów)

Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał książkę.

x - dni

y - stron dziennie

$$x \cdot y = 480 \Rightarrow y = \frac{480}{x}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 480 \\ (x-3)(y+8) = 480 \end{cases}$$

$$(x-3)\left(\frac{480}{x} + 8\right) = 480$$

$$\cancel{x} \cdot \frac{480}{\cancel{x}} + 8x - \frac{3 \cdot 480}{x} - 24 = \cancel{480}^{\,0} \quad / -480$$

$$8x - \frac{3 \cdot 480}{x} - 24 = 0 \quad / \cdot x$$

$$8x^2 - 3 \cdot 480 - 24x = 0 \quad / : 8$$

$$x^2 - 3 \cdot 60 - 3x = 0$$

$$x^2 - 3x - 180 = 0$$

$$\Delta = 3^2 + 4 \cdot 180 = 9 + 720 = 729$$

$$\sqrt{\Delta} = 27$$

$$x_1 = \frac{3-27}{2} = \frac{-24}{2} = -12 \text{ dni ?} - \text{odpada}$$

$$x_2 = \frac{3+27}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ dni}$$

Czytał książkę 15 dni.

Odpowiada, podpowiada, ...

zadanie	rozwiązanie
7.1. Inf. CKE 2023, 12, s. 27	1. F, 2. P
7.2. CKE próbna 2009, 10	a) 21
7.3. R2K2, 896, s.124	d) $y = 5x$
7.4. CKE 2022, 2, s. 2	b) $\frac{13}{6}$
7.5. Inf. CKE 2023, 4, s. 15	$\frac{x+y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
7.6. Inf. CKE 2023, 7, s. 20	$x = -\frac{1}{4}$
7.7. CKE 2008, 10, s. 14	$a = 10$, $h(x) = \frac{10}{x}$, $h(\pi) - h(-\pi) > 0$, $h(x) > 5$ dla $x \in (0,2)$
7.8. CKE 2014, 29, s. 13	a) przedział $(2,3)$; b) miejscem zerowym funkcji g jest liczba 6.
7.9. R2K1, 386, s.76	Punkty $(-5,-4)$ i (4, 5).
7.10. R2K1, 389, s.76	Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty,0)$ oraz w przedziale $(0,\infty)$. Funkcja g jest stała w zbiorze $\boldsymbol{R} \setminus \{2\}$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) > g(x)$ jest $(0,2) \cup (2,\infty)$.
7.11. CKE próbna 2009, 32	Układ równań $\begin{cases} x \cdot y = 480 \\ (x+8)(y-3) = 480 \end{cases}$ Symbol x oznacza liczbę stron przeczytanych każdego dnia, y to liczba dni. Uczeń przeczytał książkę w ciągu 15 dni.