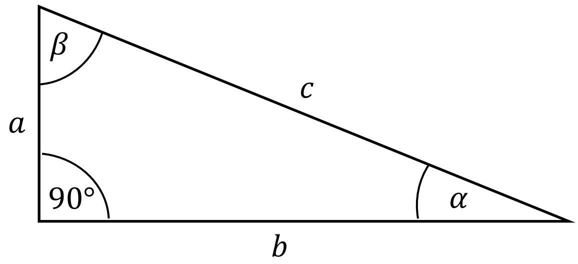
Matematyka poziom spokojny

8. Trygonometria TEORIA

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego.

Stosunki długości boków trójkąta prostokątnego nazywamy *funkcjami trygonometrycznymi*. Suma kątów w trójkącie prostokątnym $\alpha + 90° + \beta = 180°$, dlatego występują w nim dwa kąty ostre α i β, których suma miar $\alpha + \beta = 90°$.



- *Sinusem* kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

- *Cosinusem* kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

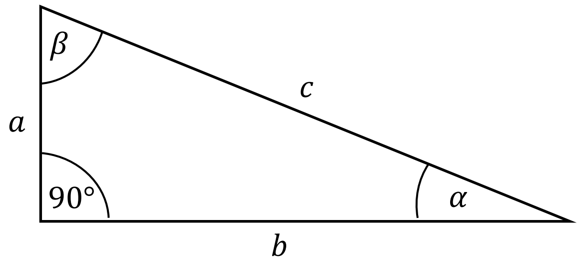
- *Tangensem* kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

- *Cotangensem* kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

W trójkącie prostokątnym obliczamy $\beta = 90° - \alpha$ i wyprowadzamy podstawowe tożsamości trygonometryczne:



- iloraz $\frac{b}{c}$ to funkcja $\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$,
- iloraz $\frac{a}{c}$ to funkcja $\cos\beta = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$,
- iloraz $\frac{b}{a}$ to funkcja $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$,
- iloraz $\frac{a}{b}$ to funkcja $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.

Z własności funkcji $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ oraz $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ można wyznaczyć poniższą tożsamość.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}\frac{c}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

W podobny sposób sprawdza się prawdziwość kolejnej tożsamości.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{b}{c}\frac{c}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Tożsamość nazywaną *jedynką trygonometryczną* udowodnia się wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

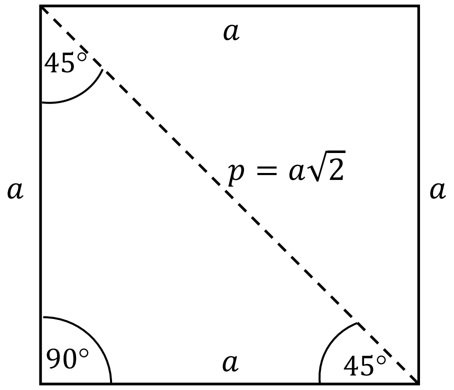
CKE udostępnia "*Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki*".

https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Informatory/wybrane_wzory_matematyczne_EM2023.pdf

W rozdziale 9. zamieszczono wszystkie wzory i tożsamości trygonometryczne przydatne podczas egzaminu, a w tablicy 17. podano wartości funkcji trygonometrycznych do obliczeń.

Warto zapoznać się z tymi materiałami przed egzaminem, by w razie potrzeby łatwiej odnaleźć potrzebny wzór.

Dzieląc kwadrat przekątną otrzymujemy trójkąt równoramienny, którego kąty przy podstawie mają miarę 45°. W takim trójkącie obliczamy funkcje trygonometryczne kąta 45°.



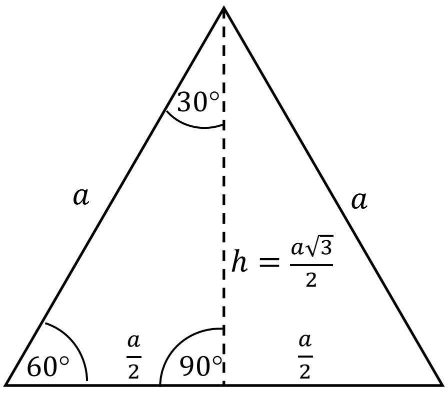
$$\sin 45° = \frac{a}{p} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{a}{p} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{ctg} 45° = \frac{a}{a} = 1$$

Trójkąt będący połową trójkąta równobocznego ma kąty ostre 30° i 60°.



$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

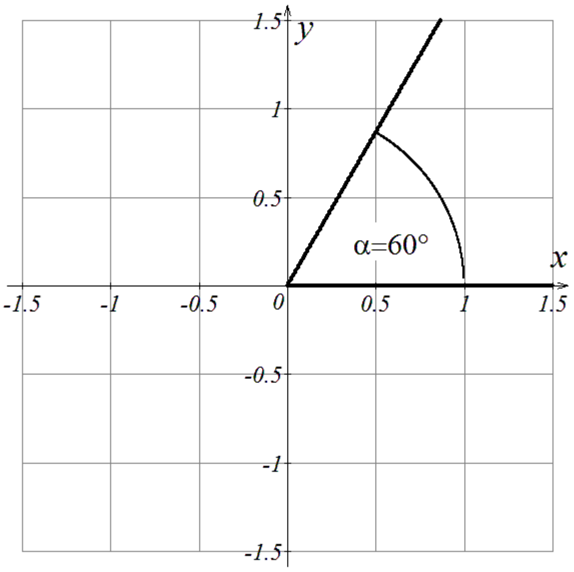
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

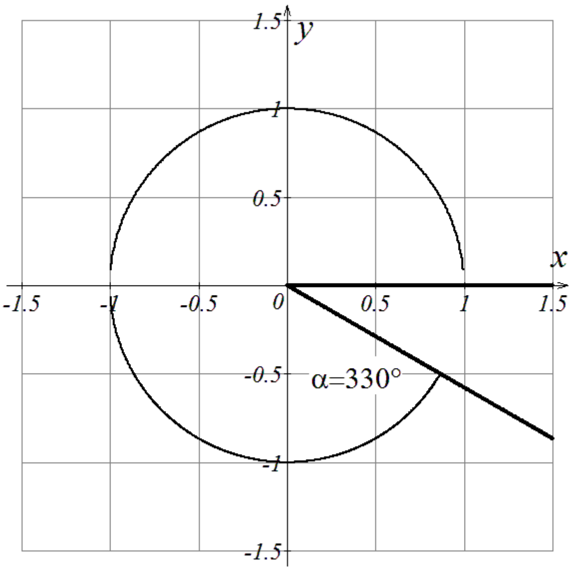
Funkcje trygonometryczne kątów 30°, 45° i 60° zawiera tabela:

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.

- Wierzchołek kąta umieszczamy w początku układu współrzędnych.
- Jedno z ramion kąta, nazywane *ramieniem początkowym*, zawiera się w dodatniej półosi *OX*.
- Drugie ramię kąta nazywane jest *ramieniem końcowym*.
- Kąt odłożony jest od ramienia początkowego do ramienia końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.





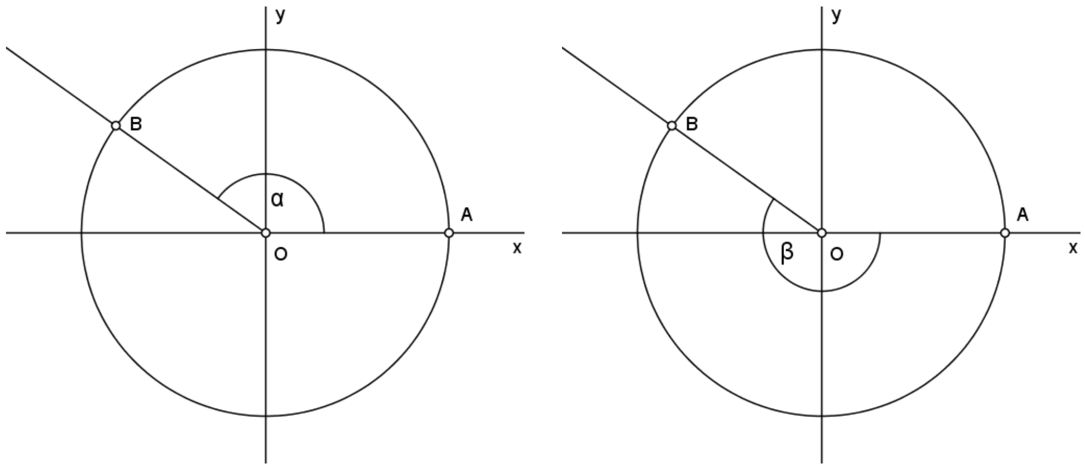
Jeżeli punkt $P = (x, y)$ jest dowolnym punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta α, różnym od początku układu współrzędnych, to podane niżej wzory służą do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$.

$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \ \cos\alpha = \frac{x}{r}$ gdzie $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ dla $x \neq 0$

$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\alpha = \frac{x}{y}$ dla $y \neq 0$

Kątem obrotu *AOB* nazywamy kąt, o jaki należy obrócić ramię początkowe (półprosta *OA*, pokrywająca się z dodatnią półosią *OX*) wokół punktu *O*, aby pokryło się ono z ramieniem końcowym (półprosta *OB*).



Przyjmuje się, że

- dodatni kierunek obrotu jest kierunkiem przeciwnym do ruchu wskazówek zegara,
- ujemny kierunek obrotu jest kierunkiem zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Podane definicje funkcji trygonometrycznych można uogólnić na dowolny kąt $\alpha + k \cdot 360°$, gdzie $\alpha \in \langle 0°, 360°)$ oraz $k \in \boldsymbol{Z}$.

Definiujemy wtedy:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin\alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos\alpha$$

Jeżeli tangens kąta α jest określony, to

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 360°) = \operatorname{tg}\alpha$$

Jeżeli cotangens kąta α jest określony, to

$$\operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 360°) = \operatorname{ctg}\alpha$$

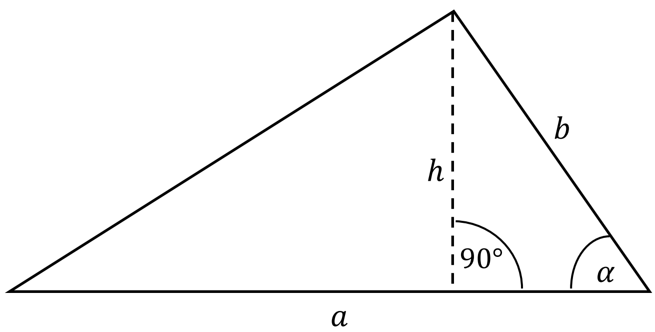
W wymaganiach dla zdających egzamin maturalny w roku 2023 zawarto obliczanie kątów trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych, a w szczególności stosowanie

twierdzenia cosinusów i wzoru na pole trójkąta $\boldsymbol{P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha}$. Trójkąty przedstawione w tematach zadań mogą być rozwartokątne, co będzie wymagało obliczania funkcji sinus lub cosinus dla kątów z zakresu od 0° do 180°. Konieczne będzie stosowanie tożsamości trygonometrycznych, użyteczna też będzie znajomość wzorów redukcyjnych.

Pole powierzchni trójkąta.

Pole powierzchni trójkąta P_Δ jest równe połowie iloczynu długości boku a i wysokości h opuszczonej na ten bok.

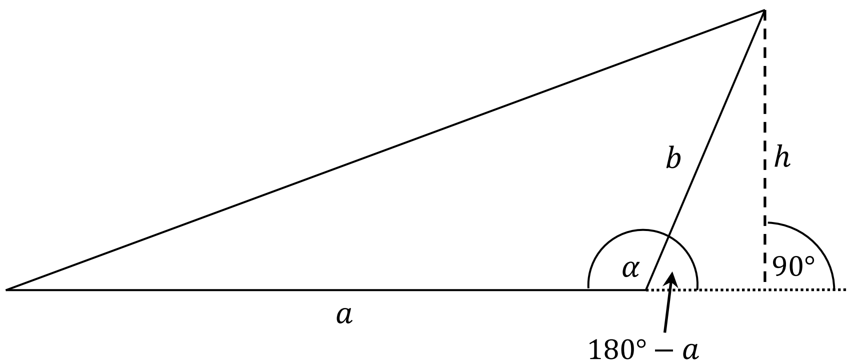
$$P_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot h$$



Ponieważ $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, przekształcamy $h = b\sin\alpha$ i podstawiamy do wzoru na powierzchnię.

$$P_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

Pole powierzchni trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między tymi bokami.



W przypadku trójkąta rozwartokątnego, którego kąt wybrany do obliczenia powierzchni ma miarę przekraczającą 90°, użycie wyprowadzonego wzoru także jest poprawne. Trójkąt prostokątny (z bokiem przyprostokątnej równym wysokości h – tak jak na szkicu powyżej), rysujemy na zewnątrz trójkąta rozwartokątnego, a wysokość h wyznaczamy z sinusa kąta dopełniającego do α.

$$\frac{h}{b} = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

Powyższą tożsamość trygonometryczną można sprawdzić, np. wykonując przekształcenia:

$$\sin(90^\circ + 90^\circ - \alpha) = \sin[90^\circ - (\alpha - 90^\circ)] = \cos(\alpha - 90^\circ) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

Twierdzenie cosinusów.

Dla dowolnego trójkąta prawdziwe są podane niżej zależności.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Oznaczenia w powyższych wzorach są takie, jak na zamieszczonym rysunku trójkąta, czyli:

kąt α jest przeciwległy do boku a,

kąt β jest przeciwległy do boku b,

kąt γ jest przeciwległy do boku c.