www.matpanda.pl

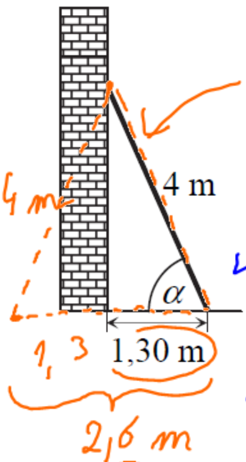
Matematyka poziom spokojny

8. Trygonometria ZADANIA

ZADANIA ZAMKNIĘTE

8.1. (1 punkt)

Drabinę o długości 4 metrów oparto o pionowy mur, a jej podstawę umieszczono w odległości 1,30 m od tego muru.

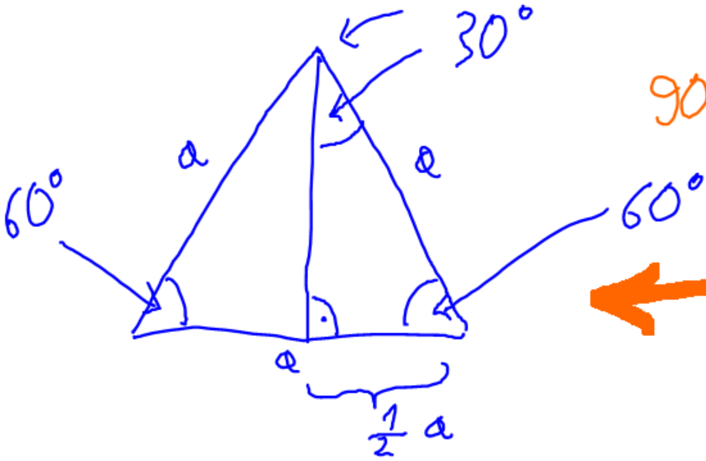


PIONOWO BARDZIEJ

Kąt α, pod jakim ustawiono drabinę, spełnia warunek

a) $0° < \alpha < 30°$ b) $30° < \alpha < 45°$ c) $45° < \alpha < 60°$ d) $60° < \alpha < 90°$

$90° > \alpha > 60°$



!

8.2. (1 punkt)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. Wtedy

a) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{26}$ b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$ c) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ d) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$$\begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

$ad = bc$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3}$$

$$3\sin\alpha = 2\cos\alpha \quad / :2$$

$$\frac{3}{2}\sin\alpha = \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{2}\sin\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{3}{2}\sin\alpha\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha + \frac{9}{4}\sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha\left(1 + \frac{9}{4}\right) = 1$$

$$\sin^2\alpha\left(\frac{4}{4} + \frac{9}{4}\right) = 1$$

$$\sin^2\alpha\left(\frac{13}{4}\right) = 1 \quad / \cdot \frac{4}{13}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{4}{13} \quad / \sqrt{\ }$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{13}}$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}\sqrt{13}}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

8.3. (1 punkt)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Wartość wyrażenia $2 - \cos^2\alpha$ jest równa

a) $\frac{25}{16}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{17}{16}$ d) $\frac{31}{16}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin\alpha = \frac{3}{4}$

$\frac{9}{16} + \cos^2\alpha = 1 \quad / - \frac{9}{16}$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16}$

$\cos^2\alpha = \frac{16-9}{16} = \frac{7}{16}$

$2 - \cos^2\alpha = 2 - \frac{7}{16} = \frac{32-7}{16} = \frac{25}{16}$

8.4. (1 punkt)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{8}{9}$. Wtedy $\cos\alpha$ jest równy

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{\sqrt{17}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{65}}{9}$

$$\begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{9}$$

$$\frac{64}{81} + \cos^2\alpha = 1 \quad \Big/ -\frac{64}{81}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{64}{81} = \frac{81-64}{81} = \frac{17}{81}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{17}{81} \quad \Big/ \sqrt{}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{17}{81}} = \frac{\sqrt{17}}{9}$$

8.5. (1 punkt)

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

b) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

c) $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

d) $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

$$\begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{13}$$

$$\sin^2\alpha + \frac{25}{169} = 1 \quad / -\frac{25}{169}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169} \quad / \sqrt{\ }$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{\cancel{13}} \cdot \frac{\cancel{13}}{5} = \frac{12}{5}$$

8.6. (1 punkt)

Wartość wyrażenia

$$\frac{\sin^2 38° + \cos^2 38° - 1}{\sin^2 52° + \cos^2 52° + 1}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

jest równa

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $-\frac{1}{2}$ d) 1

$$\frac{\overbrace{\sin^2 38° + \cos^2 38°}^{1} - 1}{\underbrace{\sin^2 52° + \cos^2 52°}_{1} + 1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

8.7. (1 punkt)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wartość wyrażenia $\cos^2\alpha - 2$ jest równa

a) $-\frac{7}{4}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{3}{4} + \cos^2\alpha = 1 \quad / - \frac{3}{4}$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\cos^2\alpha - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -1\frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$

8.8. (1 punkt)

Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}}$, to wartość wyrażenia

$$\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha}$$

jest równa

a) $-\frac{11}{23}$ b) $\frac{24}{5}$ c) $-\frac{23}{11}$ d) $\frac{5}{24}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$: \cos\alpha$

$$\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{3\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}} - 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 5\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}}} = \frac{3 - 2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 5} =$$

$$= \frac{3 - 2\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} - 5} = \frac{3 - \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} - 5} = \frac{\frac{15}{5} - \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} - \frac{25}{5}} = \frac{\frac{11}{5}}{-\frac{23}{5}} =$$

$$= -\frac{11}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{23} = -\frac{11}{23}$$

8.9. (1 punkt)

Nie istnieje kąt ostry α taki, że

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ i $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

c) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

d) $\sin\alpha = \frac{9}{15}$ i $\cos\alpha = \frac{12}{15}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \neq 1$

8.10. ~~(1 punkt)~~ 2

Kąt o danej mierze α taki, że $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ oraz $90° < \alpha < 180°$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań.

Zaznacz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1	Dla kąta α spełnione jest równanie: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.	**P**	**F**
2	Dla kąta α spełnione jest równanie: $\lvert \mathrm{tg}\,\alpha \rvert = \frac{3}{4}$.	**P**	**F**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$
$$\frac{16}{25} + \cos^2\alpha = 1 \quad / -\frac{16}{25}$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{9}{25} \quad / \sqrt{\ }$$
$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{3}{5} \\ \cos\alpha = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3} =$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{4}{3}$$
$$\lvert \mathrm{tg}\,\alpha \rvert = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

ZADANIA OTWARTE

8.11. (2 punkty)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha$.

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad / \cdot \cos\alpha$$

$$2\cos\alpha = \sin\alpha \quad / : 2$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 1$$

$$\frac{5}{4}\sin^2\alpha = 1 \quad / \cdot \frac{4}{5}$$

$$\cancel{\frac{4}{5}}\cancel{\frac{5}{4}}\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{4}{5}}$$

8.12 (2 punkty)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{3}{4} + \cos^2\alpha = 1 \quad / -\frac{3}{4}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{4} =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

8.13. (2 punkty)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$.

Oblicz $\cos\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad ,$$

$$\frac{5}{12} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad / \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{5}{12}\cos\alpha = \sin\alpha$$

$$\left(\frac{5}{12}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{25}{144}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha\left(\frac{25}{144} + 1\right) = 1$$

$$\cos^2\alpha\left(\frac{25 + 144}{144}\right) = 1$$

$$\frac{169}{144}\cos^2\alpha = 1 \quad / \cdot \frac{144}{169}$$

$$\frac{\cancel{144}}{\cancel{169}} \cdot \frac{\cancel{169}}{\cancel{144}}\cos^2\alpha = \frac{144}{169}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{144}{169} \quad / \sqrt{}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{12}{13}}$$

KĄT OSTRY

8.14. (2 punkty)

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$.

Oblicz wartość wyrażenia $\boxed{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad , \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2 \quad / \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\sin\alpha \cdot \cancel{\cos\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} + \cancel{\sin\alpha}\cos\alpha\,\frac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$1 = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \quad / : 2$$

$$\frac{1}{2} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\boxed{\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}}$$

Odpowiada, podpowiada, ...

zadanie	rozwiązanie
8.1 CKE 2015s, 13, s. 6	d) $60° < \alpha < 90°$
8.2 CKE 2016, 7, s. 8	c) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$
8.3 CKE 2010, 14, s. 6	a) $\frac{25}{16}$
8.4 CKE 2010 prób., 15,s.6	c) $\frac{\sqrt{17}}{9}$
8.5 CKE 2011, 13,s. 4	a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$
8.6 CKE 2011, 14,s. 6	b) 0
8.7 CKE 2013, 14,s. 6	a) $-\frac{7}{4}$
8.8 CKE 2014, 14,s. 6	a) $-\frac{11}{23}$
8.9 CKE 2022/8, 17,s. 8	a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{2}{3}$
8.10 CKE Inf'23, 29,s. 63	1–**P**, 2–**F**
8.11 CKE 2022, 32,s. 19	$\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$
8.12 CKE 2013, 27, s.11	$\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$
8.13 CKE 2010, 29, s. 12	$\cos\alpha = \frac{12}{13}$
8.14 CKE 2011, 28, s. 12	$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}$