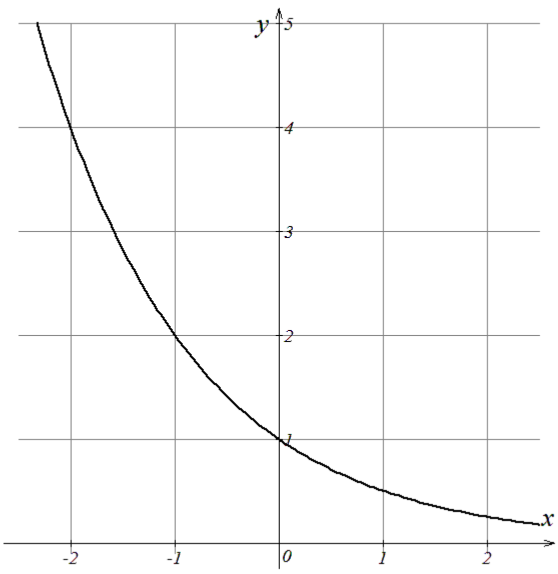
www.matpanda.pl

Matematyka poziom spokojny

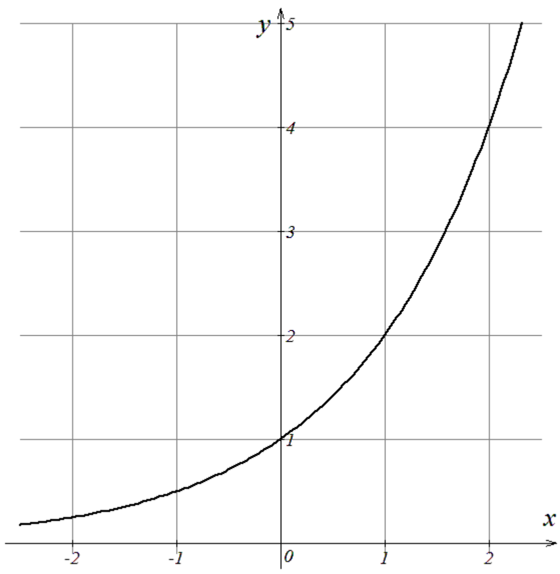
9. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Autorzy informatora CKE określili zakres materiału z matematyki na maturę w 2023 roku: **„Zdający posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi**."

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję zapisaną w postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \boldsymbol{R}$. Dziedziną funkcji wykładniczej jest **cały** zbiór liczb rzeczywistych, jej zbiorem wartości jest przedział $(0, \infty)$. Monotoniczność funkcji wykładniczej zależy od a.



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



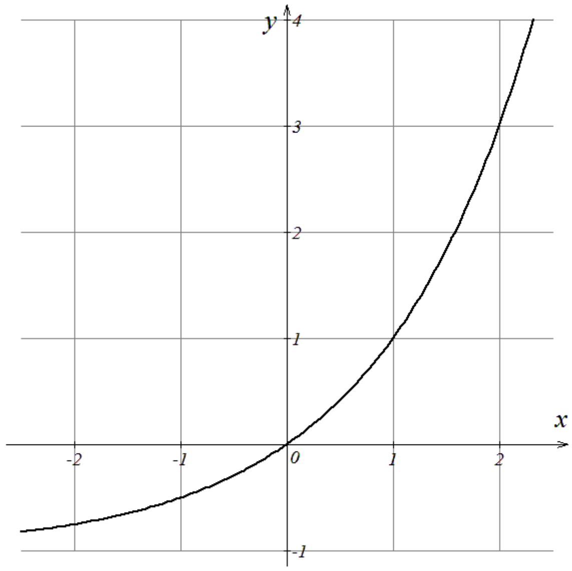
$f(x) = 2^x$

Dla $a \in (0, 1)$ funkcja wykładnicza jest malejąca, dla $a \in (1, \infty)$ funkcja ta jest rosnąca. W definicji tej funkcji przyjmujemy, że $a \neq 1$, gdyż $f(x) = 1^x = 1$ jest funkcją stałą. Wykres funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$.

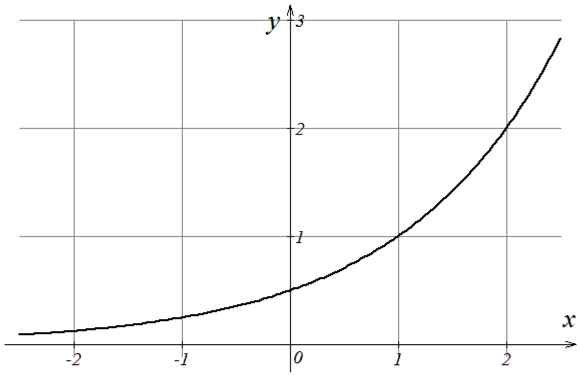
Asymptotą poziomą wykresu funkcji wykładniczej jest oś OX.

Wykres funkcji $f(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o jedną jednostkę w dół.
Asymptotą poziomą tego wykresu jest funkcja

$$f(x) = -1.$$



Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-1}$ otrzymujemy Przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o jedną jednostkę w prawo.



W opisie wielu zagadnień stosuje się funkcję wykładniczą $f(x) = e^x$, w której występuje liczba niewymierna $e \cong 2{,}718282$ ... (liczba ta jest podstawą tzw. logarytmów naturalnych).

Logarytmem liczby $b \in (0, +\infty)$ przy podstawie $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę logarytmu, aby otrzymać liczbą logarytmowaną.

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Z definicji logarytmu i własności działań na potęgach wynikają podane niżej zależności.
Dla $a, b > 0$ i $a \neq 1$ zachodzi:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a (a^x) = x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Logarytmem dziesiętnym nazywamy logarytm o podstawie 10.

Zapisujemy go w postaci $\log_{10} x$ lub w krótszej formie $\log x$.

Na przykład: $\log_{10} 10 = \log 10 = 1$, $\log 1000 = \log(10^3) = 3$.

Logarytmem naturalnym nazywamy logarytm o podstawie $e \cong 2{,}718282$ ... .

Zapisujemy go w postaci $\log_e x$ lub w krótszej formie $\ln x$.

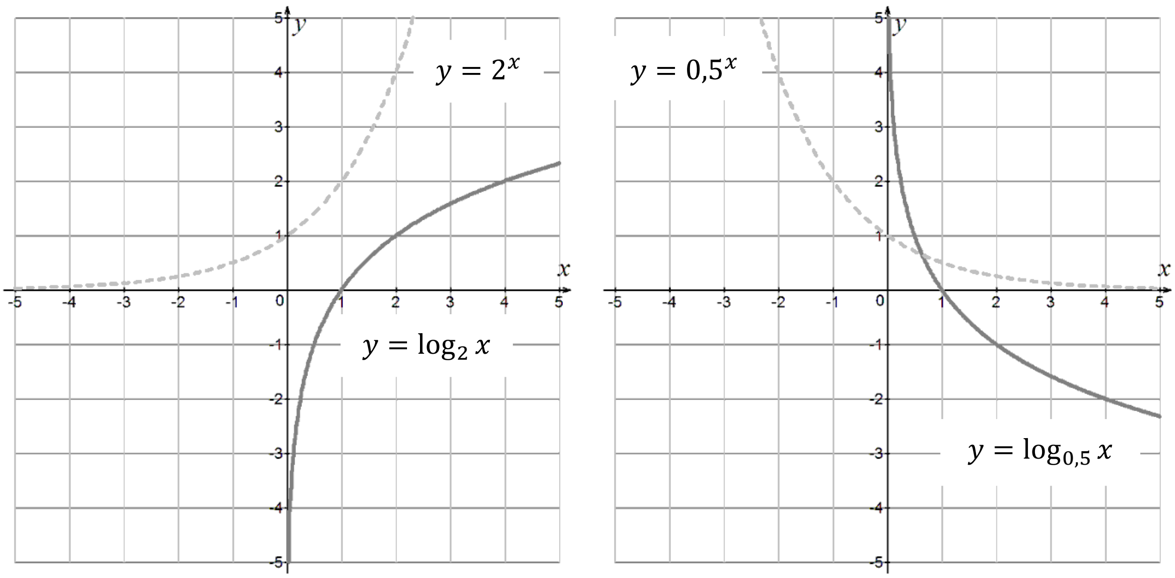
Dla $x, y > 0$ i $a > 0, a \neq 1, c \in \boldsymbol{R}$ określone są następujące własności logarytmów:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^c) = c \log_a x$$

Porównanie wykresów funkcji wykładniczej $y = a^x$ i funkcji logarytmicznej $y = \log_a x$.



Na powyższych wykresach przedstawiono przykłady funkcji wykładniczej (linia przerywana) oraz funkcji logarytmicznej (linia ciągła). Dziedziną funkcji logarytmicznej jest $(0, +\infty)$, miejscem zerowym funkcji logarytmicznej jest $x = 1$.

Dla podstawy logarytmu $a > 1$ funkcja logarytmiczna jest rosnąca.

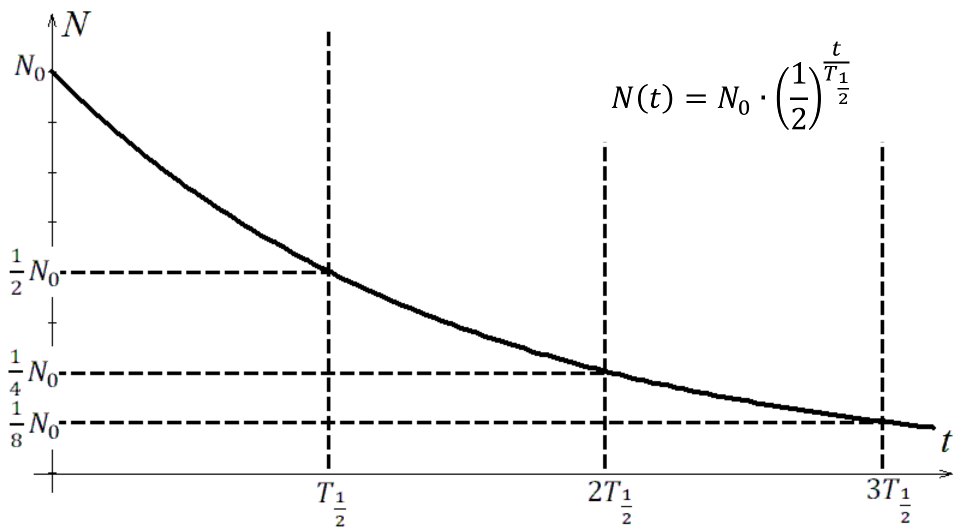
Dla podstawy logarytmu $0 < a < 1$ funkcja logarytmiczna jest malejąca.

Przykład zastosowania funkcji wykładniczej.

W przyrodzie występują pierwiastki tzw. promieniotwórcze, których jądra samorzutnie rozpadają się. Zgodnie z *prawem rozpadu* liczba jąder rozpadających się maleje wykładniczo.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

N_0 oznacza pierwotną liczbę jąder, N to liczba jąder, które nie uległy rozpadowi po czasie t, λ oznacza stałą rozpadu charakteryzującą prawdopodobieństwo rozpadu pojedynczego jądra atomowego w jednostce czasu. Okres połowicznego rozpadu $T_{\frac{1}{2}}$ jest to średni czas, po którym połowa pierwotnej liczby jąder atomowych ulega rozpadowi. Po czasie dwukrotnie dłuższym, czyli $2 \cdot T_{\frac{1}{2}}$, z pierwotnej liczby jąder N_0 pozostaje $\frac{1}{4}N_0$, a po czasie $3 \cdot T_{\frac{1}{2}}$ pozostaje $\frac{1}{8}N_0$ jąder, które jeszcze nie uległy rozpadowi. Zależność tę ilustruje wykres.



Do wyznaczenia masy próbki izotopu promieniotwórczego również zastosujemy prawo rozpadu. Początkowa masa izotopu promieniotwórczego wynosi m_0 i zmniejsza się wraz z upływem czasu t . Zależność funkcyjną $m(t)$ wyraża wzór

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}$$

Po upływie czasu t równego okresowi połowicznego rozpadu $T_{\frac{1}{2}}$, połowa masy m_0 atomów promieniotwórczego izotopu ulegnie rozpadowi. Po czasie dwukrotnie dłuższym, czyli $2 \cdot T_{\frac{1}{2}}$, z pierwotnej masy pozostaje $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_0 = \frac{1}{4} m_0$, a po czasie $3 \cdot T_{\frac{1}{2}}$ pozostaje $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_0 = \frac{1}{8} m_0$ masy, które jeszcze nie uległa rozpadowi.

Przykład zastosowania logarytmów.

Próg słyszalności dla ludzkiego ucha wynosi $I_0 \cong 10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ (jednostką jest wat na metr kwadratowy). Natężenie dźwięku można mierzyć, porównując je z natężeniem progu słyszalności. Poziom głośności dźwięku o natężeniu I wyraża się w belach i decybelach (Bel jest logarytmiczną jednostka miary wielkości ilorazowych, dlatego jest wielkością bezwymiarową; używamy symboli B oraz dB; gdzie $1\mathrm{B} = 10\mathrm{dB}$).

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}\ [\mathrm{dB}]\ .$$

Np. poziom głośności o natężeniu $I \approx 10^{-1}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ występuje na koncercie rockowym.

$$L = 10 \cdot \log \frac{10^{-1}\ \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]}{10^{-12}\ \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]}\ [\mathrm{dB}] = 10 \cdot \log \frac{10^{-1}}{10^{-12}}\ [\mathrm{dB}] = 10 \cdot \log(10^{11})\ [\mathrm{dB}] = 110\ [\mathrm{dB}]$$