



www.matpanda.pl

Matematyka poziom spokojny

11. Kombinatoryka, prawdopodobieństwo, statystyka

Reguła mnożenia

Jeżeli zbiór A zawiera m elementów, co oznaczamy symbolicznie $|A| = m$, a zbiór B zawiera n elementów ($|B| = n$), to liczba różnych par (x, y) , takich że $x \in A$ oraz $y \in B$, jest równa iloczynowi $m \cdot n$.

Przykład

Rzucamy monetą (która może upaść na dwa sposoby: wypada „orzeł” bądź „reszka”) oraz kostką do gry (posiadającą sześć ścian, ponumerowanych lub oznaczonych „oczkami”). Liczba różnych zdarzeń (par – wynik rzutu monetą, wynik rzutu kostką) wynosi $2 \cdot 6 = 12$.

Gdy wybór polega na podjęciu n decyzji, a pierwszą decyzję można podjąć na k_1 sposobów, drugą decyzję można podjąć na k_2 sposobów, ..., n – tą decyzję można podjąć na k_n sposobów, to taki wybór można podjąć na $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ sposobów.

Przykład

Pewna grupa numerów rejestracyjnych samochodów z województwa małopolskiego składa się ze znaków: „KR XXXX Y”, gdzie:

- symbol X oznacza cyfrę od 0 do 9, $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $|X| = 10$.
- symbol Y oznacza literę alfabetu,

$Y \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, W, X, Y, Z\}$; $|Y| = 24$.

W grupie tak oznaczonych samochodów można spotkać $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 24 = 240\,000$ różnych rejestracji.

Permutacje i wariacje

Permutacją n – elementowego zbioru nazywany jest każdy n – elementowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Liczba wszystkich permutacji n – elementowego zbioru jest równa $P_n = n!$

Symbol $n!$ (czytamy: „ n silnia”) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n .

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Ponadto przyjmuje się, że $0! = 1$ oraz $1! = 1$.

Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $(n + 1)! = n! (n + 1)$.

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

...

$$9! = 362880$$

Przykład

Gdy w zawodach startuje 10 zawodników i należy im przydzielić numery (od 1 do 10), to można to zrobić na $P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$ sposobów.

Jeżeli z różnych elementów zbioru A (zawierającego n – elementów) utworzymy k – elementowy ciąg (gdzie $k \leq n$), to taki ciąg nazywamy *wariacją bez powtórzeń* elementów zbioru A .

Każda n – elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru n – elementowego jest permutacją.

Liczba wszystkich k – elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n – elementowego, gdzie $k \leq n$, jest równa

$$V_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Przykład

Tworzymy trzy–literowy kod z alfabetu zawierającego 24 litery.

W kodzie żadna litera nie może się powtórzyć. Możliwych do utworzenia kodów jest

$$V_{24}^3 = 24 \cdot 23 \cdot 22 = \frac{24!}{(24 - 3)!} = 12\,144$$

Każdy k – elementowy ciąg, w którym elementy mogą się powtarzać, utworzony z elementów zbioru A , nazywamy k – elementową *wariacją z powtórzeniami* elementów zbioru A .

Liczba wszystkich k – elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n – elementowego jest równa

$$W_n^k = n^k$$

Przykład.

Tworzymy trzy–literowy kod z alfabetu zawierającego 24 litery. W kodzie dowolna litera może się powtórzyć. Liczba możliwych do utworzenia kodów wynosi

$$W_{24}^3 = 24^3 = 13\,824$$

Kombinacje

Każdy k – elementowy podzbiór zbioru n – elementowego A , nazywamy k – elementową *kombinacją* zbioru A (oczywiście $k \leq n$). W kombinacji elementy nie mogą się powtarzać, natomiast kolejność, w jakiej zapisujemy elementy kombinacji, nie jest istotna.

Wszystkich k – elementowych kombinacji zbioru n – elementowego jest

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Liczbę kombinacji zapisujemy również używając symbolu Newtona (i czytamy go „ n po k ”).

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Przykład

W pewnej klasie liczącej 24 uczniów postanowiono wybrać 3 osobową delegację. Liczba kombinacji wynosi: $C_{24}^3 = \binom{24}{3} = \frac{24!}{3!(24-3)!} = \frac{24!}{3! \cdot 21!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2024$.

Ponieważ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, to k – elementowych kombinacji zbioru n – elementowego jest tyle samo, co $(n-k)$ – elementowych kombinacji tego zbioru. W podanym przykładzie liczba kombinacji wyboru delegacji 21 osobowej klasie liczącej 24 uczniów także wynosi 2024.

Rachunek prawdopodobieństwa – zdarzenia losowe

Doświadczenia, których wyniku nie można przewidzieć i które mogą być przeprowadzane wielokrotnie nazywamy doświadczeniami losowymi. Przykładami doświadczeń losowych są rzuty kostką do gry (w pojedynczym rzucie może wypaść tylko jedna z sześciu różnie oznaczonych ścianek) lub rzuty monetą (w pojedynczym rzucie mamy dwa możliwe wyniki: „orzeł” albo „reszka”).

Poszczególne wyniki doświadczenia losowego nazywamy *zdarzeniami elementarnymi*; pojedyncze zdarzenia elementarne oznaczamy małą grecką literą ω .

Zbiór zdarzeń elementarnych nazywamy *przestrzenią zdarzeń elementarnych*; przestrzeń zdarzeń oznaczamy dużą grecką literą Ω .

Przestrzeń zdarzeń rzutu kostką $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Przestrzeń zdarzeń rzutu monetą $\Omega = \{\text{orzeł}, \text{reszka}\}$.

Dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω nazywamy *zdarzeniem losowym*.

Zdarzenia losowe oznaczamy dużymi literami: $A, B, C, \dots$.

- Jeżeli zdarzenie losowe jest zbiorem pustym, to nazywamy je *zdarzeniem niemożliwym*.
- Jeżeli zdarzenie losowe jest całym zbiorem zdarzeń elementarnych Ω , to nazywamy je *zdarzeniem pewnym*.
- Elementy zdarzenia A nazywamy *wynikami sprzyjającymi* zdarzeniu A .

Na zdarzeniach losowych wykonujemy takie same działania jak na zbiorach.

Dla zdarzeń losowych $A, B \subset \Omega$:

- Zdarzeniu $A \cup B$ sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A lub B .
- Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie A i B .
- Zdarzeniu $A \setminus B$ sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A i niesprzyjające B .
- Jeżeli $A \cap B = \emptyset$ (zdarzenie niemożliwe), to zdarzenia A i B są rozłączne (wykluczają się).
- Zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A .
- Podobnie jak w rachunku zbiorów prawdziwe są działania $A \cap A' = \emptyset$ oraz $A \cup A' = \Omega$.
- Jeżeli wszystkie elementy zdarzenia A należą do zdarzenia B , to mówimy, że zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B i zapisujemy jako $A \subset B$.

Jeżeli n razy przeprowadzamy doświadczenie losowe (np. rzucamy kostką) i k razy wypadło takie samo zdarzenie elementarne, to mówimy, że *częstość* jego pojawienia się wynosiła $\frac{k}{n}$.

Prawdopodobieństwo klasyczne

Prawdopodobieństwem klasycznym (lub inaczej „schematem klasycznym”) nazywamy sytuację, w której wszystkie wyniki doświadczenia zdarzają się równie często, czyli są jednakowo prawdopodobne.

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A (zbioru zawierającego $|A|$ elementów) zawartego w przestrzeni Ω (zbiorze skończonym i niepustym zawierającym $|\Omega|$ elementów) określa poniższa definicja.

Prawdopodobieństwem zdarzenia A (gdzie $A \subset \Omega$) nazywamy liczbę

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Przykład

W rzucie kostką przestrzeń zdarzeń $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zdarzeniu polegającemu na wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek sprzyjają trzy wyniki $A = \{1, 3, 5\}$; zatem prawdopodobieństwo zdarzenia

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Rozkład prawdopodobieństwa

Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ będzie zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego i każdemu wynikowi ω_i przypisujemy liczbę p_i (nieujemną) nazywaną prawdopodobieństwem zdarzenia elementarnego ω_i tak, aby spełniony był warunek $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Mówimy wtedy, że na przestrzeni Ω został określony *rozkład prawdopodobieństwa*.

Prawdopodobieństwo $P(A)$ zdarzenia A jest sumą prawdopodobieństw zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A . Dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi nierówność $0 \leq P(A) \leq 1$.

Jeżeli prawdopodobieństwa dwóch zdarzeń są równe, to mówimy, że te zdarzenia są jednakowo prawdopodobne. W zadaniach dotyczących na przykład rzutu kostką przyjmuje się, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Wyjątkiem są zadania, w których temacie wyraźnie opisano np. niesymetryczną kostkę do gry.

Niech P będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A, B \subset \Omega$.

Wówczas:

- $P(\emptyset)=0$
- $P(\Omega)=1$
- Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$
- $P(A) + P(A') = P(\Omega)=1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Statystyka

Statystyka jest działem matematyki, zajmującym się pozyskiwaniem, metodami prezentacji i analizą danych opisujących masowe zjawiska (z dużą ilością przetwarzanych informacji).

Średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ określa podany poniżej wzór.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Mediana uporządkowanego rosnąco ciągu n danych liczbowych $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ to :

- środkowy wyraz ciągu, gdy n jest nieparzyste;
- średnia arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów ciągu, gdy n jest parzyste.

Mediana dzieli ciąg danych liczbowych na dwie równoliczne grupy; dane w jednej grupie są od mediany mniejsze lub jej równe, a w drugiej grupie są od mediany większe lub jej równe.

Dominanta to wartość, która występuje w analizowanym zbiorze danych liczbowych najczęściej. Gdy w danym zbiorze jest kilka liczb występujących z tą samą, najwyższą częstością, to przyjmujemy, że każda z tych liczb jest dominantą. Gdy w danym zbiorze wszystkie liczby występują tak samo często, to przyjmujemy, że nie ma w nim dominanty.

Dominanta nazywana jest też *wartością modalną*, *modą* lub *wartością najczęstszą*. Może ona być również użyteczna, jeżeli wartości zmiennej obserwowanej nie są liczbowe (np. dominantą mogą być gatunki grzybów najczęściej spotykane podczas grzybobrania).

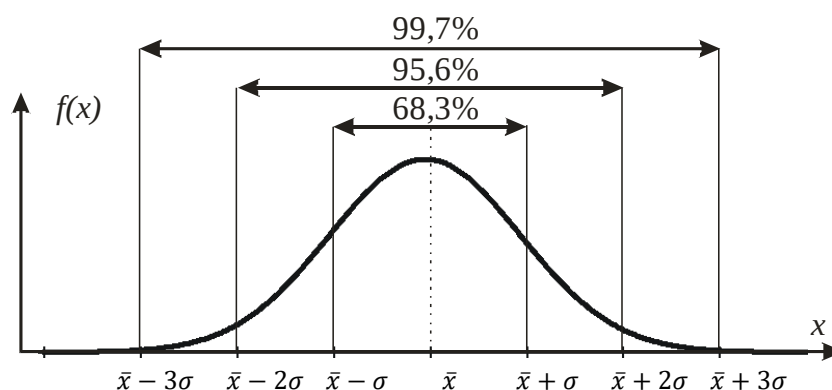
Wariancja i odchylenie standardowe charakteryzują rozproszenie danych liczbowych $x_1, x_2, \dots, x_n$ wokół ich średniej arytmetycznej $\bar{x}$. Mniejsza wartość odchylenia standardowego oznacza, że więcej jest liczb bliskich średniej arytmetycznej. Większa wartość odchylenia standardowego oznacza, że rozkład liczb jest bardziej równomierny. Wariancję określamy podanym poniżej wzorem.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Odchyleniem standardowym nazywamy pierwiastek z wariancji.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Gdy analizujemy dużą liczbę danych (np. wzrost i waga ludzi) i przedstawimy je na wykresie, gdzie na osi poziomej zaznaczymy badaną cechę, a na osi pionowej liczbę przypadków, w których ta cecha występuje (np. liczba ludzi o danym wzroście lub wadze), to wykres ten będzie miał tak zwany *rozkład normalny*. Rozkład normalny jest symetryczny względem prostej pionowej poprowadzonej przez średnią arytmetyczną danych $\bar{x}$. Około 68,3 % danych różni się od średniej arytmetycznej o mniej niż odchylenie standardowe σ , a około 95,6 % danych różni się od $\bar{x}$ o mniej niż 2σ . Według *reguły trzech sigm* około 99,7 % danych należy do przedziału $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$.



Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z odpowiadającymi im wagami $w_1, w_2, \dots, w_n$ (wagi muszą być liczbami dodatnimi) określamy wzorem

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

Dane, którym przypisano większe wagi, mają większy udział w określeniu średniej ważonej niż dane, którym przypisano mniejsze wagi.