



www.matpanda.pl

Matematyka poziom spokojny

11. Kombinatoryka, prawdopodobieństwo, statystyka

ZADANIA ZAMKNIĘTE

11.1. (1 punkt)

Wszystkich liczb pięciocyfrowych, w których występują wyłącznie cyfry 0, 2, 5, jest

a) 12

b) 36

c) 162

d) 243



$$\begin{aligned} 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 &= 81 \\ 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 &= 81 \\ \hline &162 \end{aligned}$$

11.2. (1 punkt)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 5.

Wtedy

a) $p = \frac{1}{36}$

b) $p = \frac{1}{18}$

c) $p = \frac{1}{12}$

d) $p = \frac{1}{9}$

$\rightarrow P = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

$|A| = ?$

$5 = ?$

$\rightarrow 5 = 1 \cdot 5$

$\rightarrow 5 = 5 \cdot 1$

$|A| = 2$

$p = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

11.3. (1 punkt)

Mediana uporządkowanego niemalejąco zestawu sześciu liczb: 1, 2, 3, x , 5, 8 jest równa 4. Wtedy

a) $x = 2$

b) $x = 3$

c) $x = 4$

d) $x = 5$

~~1, 2, 3, x, 5, 8~~



$$\text{mediana} = \frac{3+x}{2}$$
$$4 = \frac{3+x}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2 \cdot 4 = \frac{3+x}{2} \quad | \cdot 2$$

$$8 = 3+x \quad | -3$$

$$x = 8-3 = 5$$

11.4. (1 punkt)

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, większych od 700, w których każda cyfra należy do zbioru $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ i żadna cyfra się nie powtarza, jest

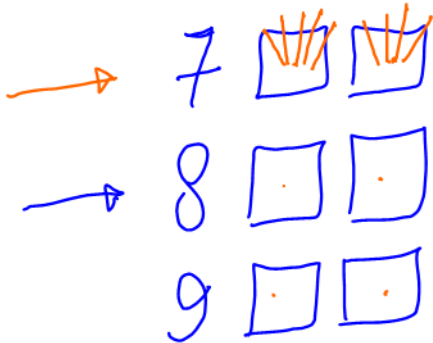
a) 108

b) 60

c) 40

d) 299

> 700



$$5 \cdot 4 = 20$$

$$5 \cdot 4 = 20$$

$$5 \cdot 4 = 20 +$$

60

11.5. (1 punkt)

Ile jest wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych utworzonych z cyfr: 1, 3, 5, 7, 9,
w których cyfry się nie powtarzają?

a) 10

b) 15

c) 20

d) 25



$$5 \cdot 4 = 20$$

11.6. (1 punkt)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry.

Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{9}$

c) $\frac{1}{12}$

d) $\frac{1}{18}$

$$P = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

$$P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$



$$3 = ?$$

$$3 = 1 + 2$$

$$3 = 2 + 1$$

2

11.7. (1 punkt)

Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?” Wyniki przedstawiono w tabeli:

→

Liczba osób w rodzinie	Liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

4

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Liczba x jest równa

a) 3

b) 4

c) 5

d) 7

Średnia = 4

$$4 = \frac{6 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + 2 \cdot x}{6 + 12 + 2}$$

$$4 = \frac{18 + 48 + 2x}{20} \quad | \cdot 20$$

$$80 = 66 + 2x \quad | - 66$$

$$80 - 66 = 2x$$

$$2x = 14 \quad | : 2$$

$$\boxed{x = 7}$$

11.8. (1 punkt)

Jeżeli A jest zdarzeniem losowym, a A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A oraz zachodzi równość $P(A) = 2 \cdot P(A')$, to

a) $P(A) = \frac{2}{3}$

b) $P(A) = \frac{1}{2}$

c) $P(A) = \frac{1}{3}$

d) $P(A) = \frac{1}{6}$

A - zdarzenie

A' - zdarzenie przeciwne

$P(A) + P(A') = 1$

$P(A) = 2 \cdot P(A') \quad / : 2$

$P(A') = \frac{1}{2} P(A)$

$P(A) + \frac{1}{2} P(A) = 1$

$\frac{3}{2} P(A) = 1 \quad / : \frac{3}{2}$

$P(A) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

11.9. (1 punkt)

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą; p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch orłów w tych trzech rzutach, wtedy

a) $0 \leq p < 0,2$

c) $0,35 < p \leq 0,5$

b) $0,2 \leq p \leq 0,35$

d) $0,5 < p \leq 1$

$$P = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$|A| = ? \quad |A| = 3$$

$$p = \frac{3}{8} = 0,375$$

$\left. \begin{array}{l} o, o, k \\ k, o, o \\ o, k, o \end{array} \right\} 3$

11.10. (1 punkt)

Cztery liczby: 2, 3, a, 8, tworzące zestaw danych, są uporządkowane rosnąco. Mediana tego zestawu czterech danych jest równa medianie zestawu pięciu danych: 5, 3, 6, 8, 2.

Zatem

a) $a = 7$

b) $a = 6$

c) $a = 5$

d) $a = 4$

~~2, 3, 5, 6, 8~~

$M = 5$

~~2, 3, a, 8~~

$M = \frac{3+a}{2}$

$5 = \frac{3+a}{2} \quad / \cdot 2$

$10 = 3+a \quad / -3$

$a = 7$

ZADANIA OTWARTE

11.11. Andrzej ma w szafie 4 koszule: czerwoną, żółtą, zieloną i niebieską; 3 pary spodni: niebieskie, czarne i szare; oraz 5 par butów: czarne, szare, zielone, czerwone i niebieskie. Andrzej wybiera z szafy zestaw ubrania: jedną koszulę, jedną parę spodni i jedną parę butów. Zestawy ubrania wybierane przez Andrzeja określimy jako różne, gdy będą różniły się kolorem chociaż jednego rodzaju elementu ubioru w zestawie.

{ 4 koszule
3 spodnie
5 par butów

11.11.1 (1 punkt)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich możliwych, różnych zestawów ubrania, jakie może wybrać Andrzej, jest równa

a) 12

b) 72

c) 60

d) 720

$$4 \cdot 3 \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$$

11.11.2 (3 punkty) 

Oblicz, na ile sposobów można wybrać taki zestaw, w którym dokładnie jeden element ubioru będzie niebieski.



$\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ koszule} \\ 3 \text{ spodnie} \\ 5 \text{ par butów} \end{array} \right.$

1. NIEBIESKA	koszula :	$2 \cdot 4 = 8$
2. — " —	spodnie :	$3 \cdot 4 = 12$
3. — " —	buty :	$3 \cdot 2 = 6 +$
		26

→ Odp. Można wybrać taki zestaw na 26 sposobów.

11. 12. (2 punkty)

Gracz rzuca dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry i oblicza sumę liczb wyrzuconych oczek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 4 lub 5, lub 6.

$$P = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

$$|A| = 12$$

$$P = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$4 = 1+3$$

$$4 = 2+2$$

$$4 = 3+1$$

$$5 = 1+4$$

$$5 = 2+3$$

$$5 = 3+2$$

$$5 = 4+1$$

$$6 = 1+5$$

$$6 = 2+4$$

$$6 = 3+3$$

$$6 = 4+2$$

$$6 = 5+1$$

Prawdopodobieństwo wynosi $p = \frac{1}{3}$

11.13. (2 punkty)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A , polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.

$$p = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$$

$$|A| = ?$$

$$|A| = 6$$

$$p = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

$$\begin{array}{l} 5 = 4 + 1 \\ 6 = 4 + 2 \\ 7 = 4 + 3 \\ 8 = 4 + 4 \\ 6 \left\{ \begin{array}{l} 7 = 6 + 1 \\ 8 = 6 + 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Odp: Prawdopodobieństwo wynosi $p = \frac{3}{32}$

11.14. (2 punkty)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że co najmniej jeden raz wypadnie ścianka z pięcioma oczkami.

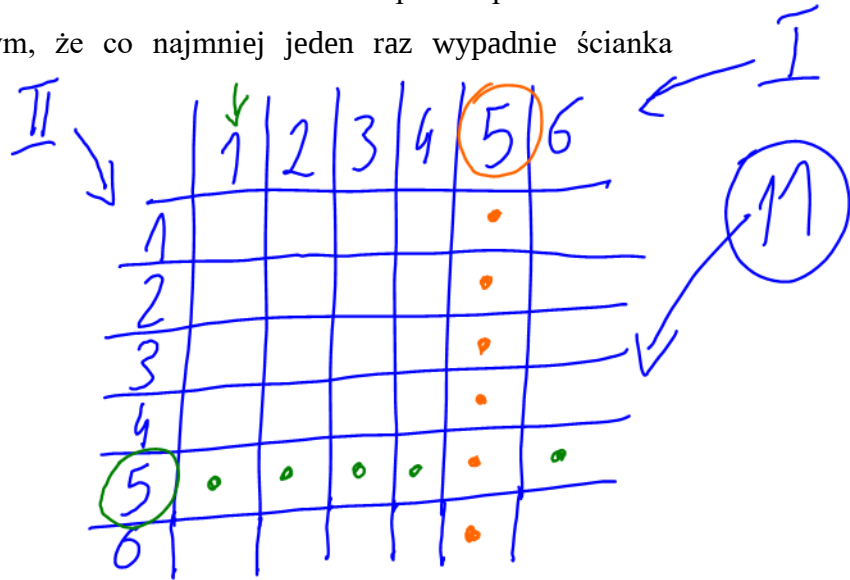
$$p = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$|\Omega| = 36$$

$$|A| = 11$$

$$p = \frac{11}{36}$$

Odp: ... $p = \frac{11}{36}$



11.15. (2 punkty)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest liczbą nieparzystą.

$$P = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P = \frac{9}{5 \cdot 5} = \frac{9}{25}$$

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

Odp: Proszę.... $P = \frac{9}{25}$

11.16. (4 punkty)

Dane są dwa zbiory:

$$A = \{100, 200, 300, 400, 500, 600, 700\},$$

$$B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}.$$

Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3.

Obliczone prawdopodobieństwo zapisz w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

	100	200	300	400	500	600	700
10	110	210	310	410	510	610	710
11	111	211	311	411	.	.	.
12	.	.	.	.	.	.	.
13							
14							
15							
16							

$p = \frac{16}{7 \cdot 7} = \frac{16}{49}$

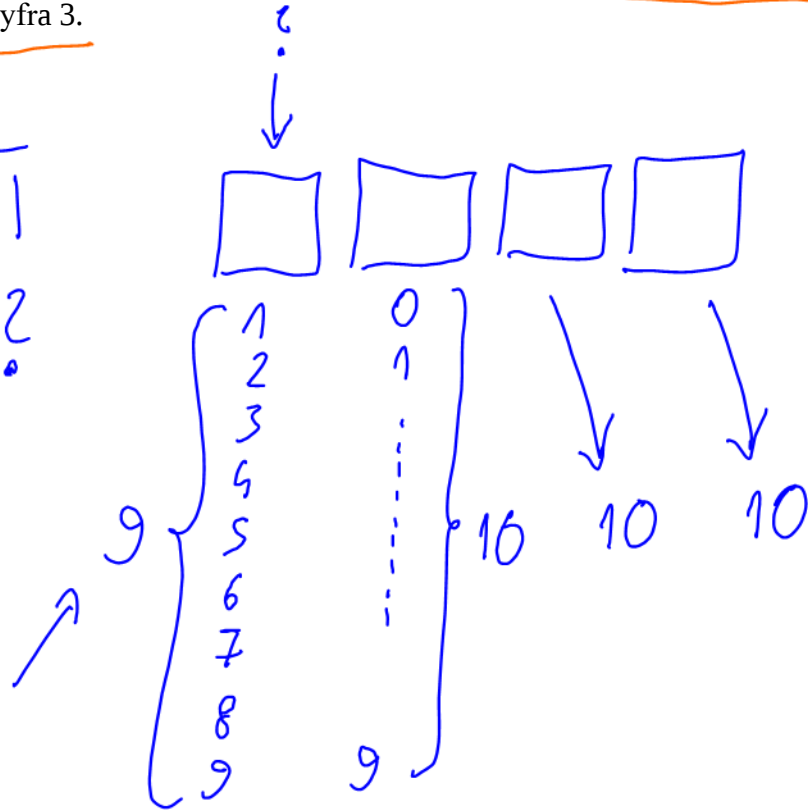
Odp: Prawdopodobieństwo wynosi $p = \frac{16}{49}$

11.17. (4 punkty)

Spośród wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3.

$$P = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$|\Omega| = ?$$



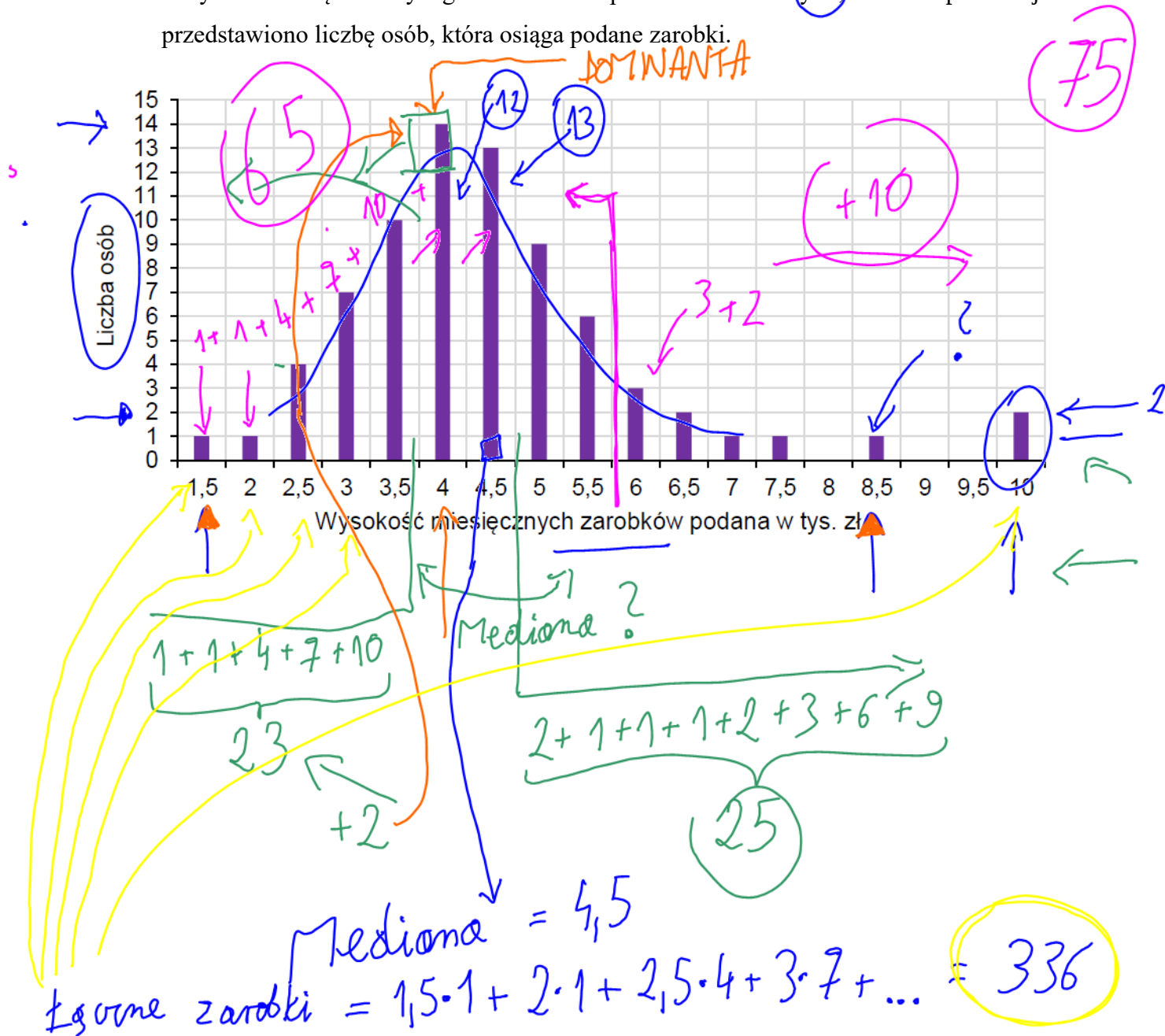
$$|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$$

$$|A| = ?$$

ciąg dalszy w osobnym pliku z zad. 11.17

11.18. (4 punkty)

Na wykresie słupkowym poniżej podano rozkład miesięcznych zarobków wszystkich pracowników w pewnej firmie F . Na osi poziomej podano – wyrażone w tysiącach złotych – miesięczne wynagrodzenie netto pracowników firmy F , a na osi pionowej przedstawiono liczbę osób, która osiąga podane zarobki.



11.18.1 (1 punkt)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dominantą miesięcznych zarobków w firmie *F* jest

A.	10 tys. zł	ponieważ	1.	tę wartość zarobków osiąga najwięcej osób w firmie <i>F</i> .
B.	4,5 tys. zł		2.	ta wartość zarobków jest największa w firmie <i>F</i> .
C.	4 tys. zł		3.	iloczyn tej wartości zarobków i liczby osób z takimi zarobkami jest największy w firmie <i>F</i> .

DOMINANTA → NAJCZĘŚCIEJ

11.18.2 (1 punkt)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Medianą miesięcznych zarobków w firmie F jest tys. zł.

4,5



11.18.3 (2 punkty)

Oblicz, jaki % liczby wszystkich pracowników firmy F stanowią osoby zarabiające 5,5 tys. zł lub mniej.

$$\frac{65}{75} \cdot 100\% = 86,6\%$$

11.18.4 (2 punkty)

Oblicz średnią miesięcznego wynagrodzenia netto wszystkich pracowników firmy *F*.

Wynik podaj bez zaokrąglania.

$$\text{Średnia} = \frac{336}{75} = 4,48$$



Odpowiada, podpowiada, ...

zadanie	rozwiązanie
11.1 CKE 2019, 24, s. 12	c) 162
11.2 CKE 2013, 22, s. 8	b) $p = \frac{1}{18}$
11.3 CKE 2013, 24, s. 8	d) $x = 5$
11.4 CKE 2021, 27, s. 14	b) 60
11.5 CKE 2020, 21, s. 10	c) 20
11.6 CKE 2011, 22, s. 8	d) $\frac{1}{18}$
11.7 CKE 2011, 23, s. 8	d) 7
11.8 CKE 2014, 23, s. 8	a) $P(A) = \frac{2}{3}$
11.9 CKE 2016, 21, s. 10	c) $0,35 < p \leq 0,5$
11.10 CKE 2020, 23, s. 12	a) $a = 7$
11.11 CKE Inf23, 47, s. 111	11.11.1. c) 60 11.11.2. Można wybrać 26 zestawów.
11.12 CKE 2021, 34, s. 21	Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{1}{3}$.
11.13 CKE, 2014, 30, s. 14	Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $P(A) = \frac{3}{32}$.
11.14 CKE 2020, 30, s. 18	Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{11}{36}$.
11.15 CKE, 2019, 30, s. 18	Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{9}{25}$.
11.16 CKE2018, 33, s. 22	Prawdopodobieństwo zdarzenia wynosi $\frac{16}{49}$.
11.17 CKE Inf23, 48, s. 114	Prawdopodobieństwo zdarzenia wynosi $\frac{1}{25}$.
11.18 CKE Inf23, 50, s. 122	11.18.1. C1. Dominantą miesięcznych zarobków w firmie F jest 4 tys. zł, ponieważ tę wartość zarobków osiąga najwięcej osób w firmie F . 11.18.2. Medianą miesięcznych zarobków w firmie F jest 4,5 tys. zł. 11.18.3. Osób w firmie F zarabiających 5,5 tys. zł lub mniej jest 87 %. 11.18.4. Średnia miesięcznego wynagrodzenia netto wszystkich pracowników firmy F wynosi 4,48 tys. zł.