



www.matpanda.pl

Matematyka poziom spokojny

2. Wartość bezwzględna. Algebra. Procenty. TEORIA

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Wartość bezwzględna liczby a jest równa jej odległości od 0 na osi liczbowej.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

$|p| > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p < -a$ lub $p > a$.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

1. $a \geq 0$ np. $a = 5$
2. $a < 0$ np. $a = -5$

$$|a| = a$$

$$|a| = -a$$

$$\Rightarrow |5| = 5 \checkmark$$
$$\Rightarrow |-5| = -(-5) = +5$$

Działanie potęgowania, działanie pierwiastkowania

Potęga a^n o wykładniku naturalnym $n > 1$ nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a .

$$\rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

$$a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0.$$

Dla $a \neq 0$ istnieje potęga o wykładniku całkowitym ujemnym $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (wtedy $a^{-1} = \frac{1}{a}$).

Własności potęg ($m, n \in \mathbb{Z}$):

$$\rightarrow a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ dla } a \neq 0$$

$$\rightarrow (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ dla } b \neq 0$$

$$\rightarrow (ab)^n = a^n b^n$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_4$$

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m b^m, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\rightarrow a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^3 \cdot a^2 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_3 \cdot \underbrace{a \cdot a}_2 = a^5$$

$$3+2=5$$

$$\rightarrow \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^4}{a^2} = \frac{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot a}}{\cancel{a \cdot a}} = a \cdot a = a^2$$

$$4-2=2$$

Pierwiastek kwadratowy (nazywany też pierwiastkiem drugiego stopnia) obliczamy z liczby rzeczywistej nieujemnej, by wynik tego działania należał do zbioru liczb rzeczywistych. Należy pamiętać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Pierwiastek n -tego stopnia to $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, dla $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Pierwiastki parzystego stopnia obliczamy tylko z liczb rzeczywistych nieujemnych.

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a . Np. $\sqrt[3]{-8} = -2$, gdyż $(-2)^3 = -8$.

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\text{oraz } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ dla } b > 0$$

$$\sqrt[2]{4} = 2 \text{ bo } 2^2 = 4$$

$$\sqrt{9} = 3 \text{ bo } 3^2 = 9$$

$$\sqrt{81} = 9 \text{ bo } 9^2 = 81$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ bo } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ bo } (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[2]{7} = 7^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[2]{3 \cdot 7} = \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[2]{7}$$

W celu sprawniejszego obliczania potęg złożonych wyrażeń, wyprowadza się **wzory skróconego mnożenia**. Dla liczb rzeczywistych a i b obliczamy:

kwadrat ich sumy $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$

kwadrat ich różnicy $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = aa - ab - ba + bb = a^2 - 2ab + b^2$

różnicy kwadratów $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Analogiczne wzory wyprowadza się przy obliczaniu

sześcianu sumy $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

sześcianu różnicy $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

sumy sześciątów $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

różnicy sześciątów $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

6, 7 strona
tablic

~~$(a+b)^2 = a^2 + b^2$~~

$\rightarrow (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$\rightarrow (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$\rightarrow a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) =$

$= a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

Procenty

- ✓ • 1% danej wielkości to $\frac{1}{100}$ tej wielkości
- ✓ • 1‰ danej wielkości to $\frac{1}{1000}$ tej wielkości
- ✓ • p % liczby a to $\frac{p}{100} \cdot a$
- ✓ • liczba a stanowi $\frac{a}{b} \cdot 100$ % liczby b
- ✓ • liczba o p % większa od liczby a to $(a + \frac{p}{100} \cdot a)$

Odsetki od kapitału powiększonego o odsetki za wcześniejszy okres służy *procent składany*.

$$1\% = ? \quad 1\% = \frac{1}{100}$$

$$1\text{‰} = ? \quad 1\text{‰} = \frac{1}{1000}$$

$$p\% \text{ liczby } a = \frac{p}{100} \cdot a$$

$$30\% \text{ liczby } 10 = \frac{30}{100} \cdot 10 = 3$$

$$5\text{‰} \cdot 5000 \text{ ml} = \frac{5}{1000} \cdot 5000 \text{ ml} = 25 \text{ ml}$$

$$\text{Jaki \% liczby } 100 \text{ stanowi liczba } 20?$$

$$\frac{20}{100} 100\% = 20\%$$

$$\text{Jaka liczba jest o } 10\% \text{ większa od } 20?$$
$$20 + 10\% \cdot 20 = 20 + \frac{10}{100} \cdot 20 = 20 + 2 = 22$$