



www.matpanda.pl

Matematyka poziom spokojny

2. Wartość bezwzględna. Algebra. Procenty. TEORIA

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Wartość bezwzględna liczby a jest równa jej odległości od 0 na osi liczbowej.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

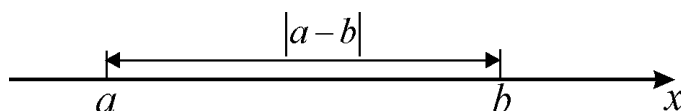
Wartość bezwzględna liczby jest nieujemna $|a| \geq 0$ oraz zachodzi równoważność

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Liczbą przeciwną do liczby rzeczywistej a jest liczba $-a$.

$$|a| = |-a|$$

Dla liczb a i b odległość na osi liczbowej między tymi liczbami jest równa $|a - b| = |b - a|$.



Zachodzi także równoważność $|a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Własności działań z użyciem wartości bezwzględnej:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ dla } b \neq 0$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad |a - b| \leq |a| + |b|$$

Tak zwana *nierówność trójkąta* wyrażona jest w podanej poniżej relacji.

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$$

Jeśli $a > 0$, to: $|p| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = -a$ lub $p = a$,

$|p| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a < p < a$,

$|p| > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p < -a$ lub $p > a$.

Działanie potęgowania, działanie pierwiastkowania

Potęga a^n o wykładniku naturalnym $n > 1$ nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

Liczbę a nazywamy podstawą potęgi. Przyjmuje się, że $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

Dla $a \neq 0$ istnieje potęga o wykładniku całkowitym ujemnym $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (wtedy $a^{-1} = \frac{1}{a}$).

Własności potęg ($m, n \in \mathbf{Z}$):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{dla } a \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{dla } b \neq 0$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Pierwiastek kwadratowy (nazywany też pierwiastkiem *drugiego stopnia*) obliczamy z liczby rzeczywistej nieujemnej, by wynik tego działania należał do zbioru liczb rzeczywistych.

Należy pamiętać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Możemy obliczać pierwiastki wyższych stopni niż drugi.

Pierwiastek n – tego stopnia to $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, dla $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$.

Pierwiastki parzystego stopnia obliczamy tylko z liczb rzeczywistych nieujemnych.

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a . Zapisujemy to symbolicznie $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$.

W przeciwieństwie do pierwiastka kwadratowego, definicję pierwiastka sześciennego można rozszerzyć na liczby ujemne. Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to dla liczby rzeczywistej a zachodzi $\sqrt[n]{a} = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b^n = a$. Np. $\sqrt[3]{-8} = -2$, gdyż $(-2)^3 = -8$.

Własności pierwiastków (dla $a \geq 0$; $n, m \in \mathbf{N}$):

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a \qquad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \text{oraz} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{dla } b > 0$$

W celu sprawniejszego obliczania potęg złożonych wyrażeń, wyprowadza się wzory *skróconego mnożenia*. Dla liczb rzeczywistych a i b obliczamy:

kwadrat ich sumy $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$

kwadrat ich różnicy $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = aa - ab - ba + bb = a^2 - 2ab + b^2$

różnicy kwadratów $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Analogiczne wzory wyprowadza się przy obliczaniu

sześcianu sumy $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

sześcianu różnicy $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

sumy sześciątów $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

różnicy sześciątów $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

W dziesiętnym systemie liczbowym każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić w postaci (skończonej albo nieskończonej) sumy iloczynów liczb jednocyfrowych i potęg liczby 10.

Np. $314,159 = 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}$

Każdą liczbę naturalną (złożoną) można rozłożyć na *czynniki pierwsze* czyli przedstawić ją w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych. Np. $120050 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2^1 \cdot 5^2 \cdot 7^4$

Rozkład liczby złożonej na czynniki pierwsze odbywa się w kilku krokach.

Np. $150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

150		3
50		2
25		5
5		5
1		

Rozkład na czynniki pierwsze liczby złożonej znajduje zastosowanie przy wyznaczaniu:

- najmniejszej wspólnej wielokrotności (oznaczanej NWW),
- największego wspólnego dzielnika (NWD).

Bardzo dużą (albo bardzo małą) liczbę wygodnie jest zapisać w *notacji wykładniczej*.

$$a \cdot 10^k, \text{ gdzie } 1 \leq a < 10 \text{ i } k \in \mathbb{Z}$$

W zapisie notacji wykładniczej:

- masa cząsteczki wody $m_{\text{H}_2\text{O}} \approx 3 \cdot 10^{-26} \text{ kg} = 0,000000000000000000000003 \text{ kg}$
- 1 mol to $6,02 \cdot 10^{23} = 602000000000000000000000$ cząsteczek
- średnica Ziemi wynosi $1,3 \cdot 10^7 \text{ m} = 13000000 \text{ m}$

Używamy też przedrostków, np. *kilo*-metr, co oznacza 1000 m lub *deka*-gram czyli 10 g.

przedrostek	symbol	mnożnik	notacja wykładnicza
giga	G	1000000000	10^9
mega	M	1000000	10^6
kilo	k	1000	10^3
hekto	h	100	10^2
deka	dag	10	10^1
decy	d	0,1	10^{-1}
centy	c	0,01	10^{-2}
mili	m	0,001	10^{-3}
mikro	μ	0,000001	10^{-6}
nano	n	0,000000001	10^{-9}

Ułamki przedstawia się zazwyczaj w możliwie najprostszej postaci, w *postaci nieskracalnej*. Licznik i mianownik ułamka w postaci nieskracalnej nie mają żadnych wspólnych dzielników całkowitych z wyjątkiem liczb -1 i 1 . Jeżeli mianownik ułamka nieskracalnego dzieli się (bez reszty) przez jakąś liczbę pierwszą różną od 2 i 5, to rozwinięcie dziesiętne takiego ułamka jest nieskończone i okresowe.

Na przykład: $\frac{1}{6} \cong 0,1666666666 = 0,1(6)$

Przybliżenia

Zapisując w postaci dziesiętnej przybliżenie liczby stosuje się *regułę zaokrąglenia*. Reguła zaokrąglenia polega na odrzuceniu końcowych cyfr liczby zgodnie z zasadami:

- gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmian,
- gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o 1.

Wynik zaokrąglenia podajemy z określoną dokładnością (np. do najbliższej liczby całkowitej, do dwóch miejsc po przecinku itp.). Jeżeli przybliżenie liczby jest od niej mniejsze, to nazywamy je przybliżeniem z niedomiarem. Jeżeli przybliżenie liczby jest od niej większe, to nazywamy je przybliżeniem z nadmiarem.

Błąd bezwzględny przybliżenia to wartość bezwzględna różnicy między wartością dokładną, a wartością przybliżoną.

$$\text{błąd bezwzględny} = |\text{wartość dokładna} - \text{wartość przybliżona}|$$

Błąd względny przybliżenia to stosunek błędu bezwzględnego do modułu wartości dokładnej.

$$\text{błąd względny} = \frac{\text{błąd bezwzględny}}{|\text{wartość dokładna}|}$$

Procenty

- 1% danej wielkości to $\frac{1}{100}$ tej wielkości
- 1‰ danej wielkości to $\frac{1}{1000}$ tej wielkości
- p % liczby a to $\frac{p}{100} \cdot a$
- liczba a stanowi $\frac{a}{b} \cdot 100$ % liczby b
- liczba o p % większa od liczby a to $\left(a + \frac{p}{100} \cdot a\right)$

Do obliczania odsetek od stałej kwoty służy *procent prosty*. Jeżeli kapitał początkowy wynosi K_0 , a oprocentowanie jest równe p %, to po n okresach naliczania odsetek kapitał wraz z naliczonymi odsetkami będzie wynosił $K_n = K_0 \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$.

Do obliczania odsetek od kapitału powiększonego o odsetki za wcześniejszy okres służy *procent składany*. Jeżeli kapitał początkowy wynosi K_0 , a po każdym okresie naliczania odsetek stan rachunku zwiększa się o p %, to po m okresach naliczania odsetek kapitał wraz z naliczonymi odsetkami będzie wynosił $K_m = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m$.