



www.matpanda.pl

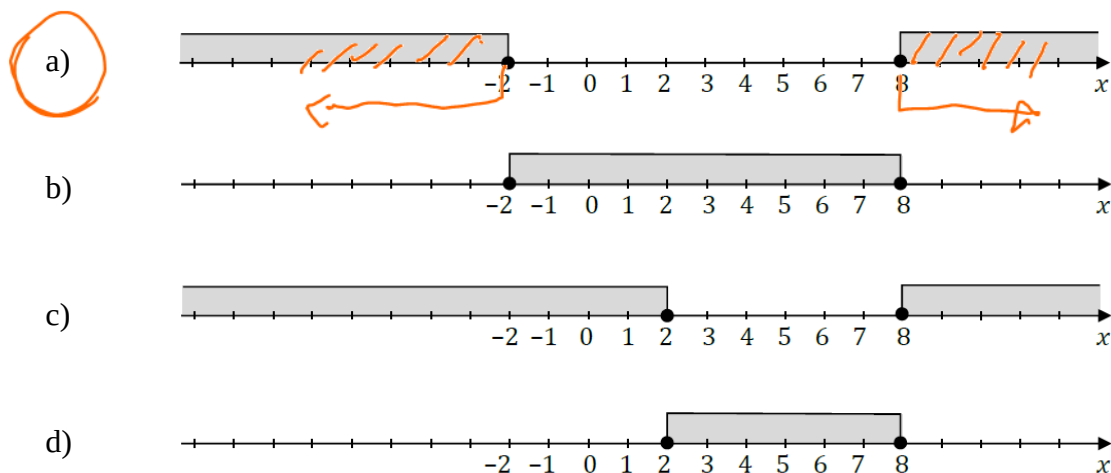
Matematyka poziom spokojny

2. Wartość bezwzględna. Algebra. Procenty. ZADANIA

$$\rightarrow |a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

ZADANIA ZAMKNIĘTE

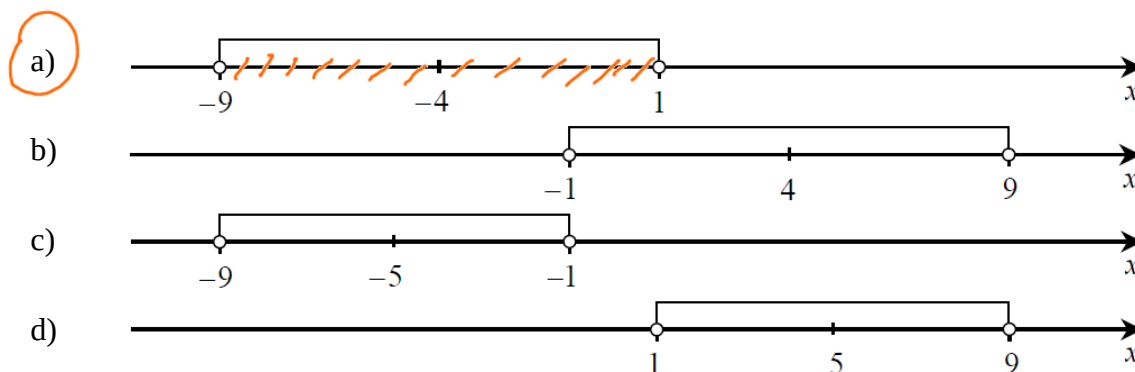
2.1. Dana jest nierówność $|x - 3| \geq 5$. Na którym rysunku prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających powyższą nierówność? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.



$$\begin{aligned} 1. \quad x - 3 &\geq 0 \\ x - 3 &\geq 5 \quad / +3 \\ \boxed{x &\geq 8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad x - 3 &< 0 \\ -(x - 3) &\geq 5 \quad / \cdot -1 \\ x - 3 &\leq -5 \quad / +3 \\ x &\leq -5 + 3 \\ \rightarrow \boxed{x &\leq -2} \end{aligned}$$

2.2. Wskaż rysunek, na którym zaznaczony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|x + 4| < 5$.



1. $x + 4 \geq 0$
 $x + 4 < 5 \quad / -4$
 $x < 1$

2. $x + 4 < 0$
 $-(x + 4) < 5 \quad / -1$!
 $x + 4 > -5 \quad / -4$
 $x > -5 - 4$
 $x > -9$

2.3. (1 punkt)

Liczba $3^{2+\frac{1}{4}}$ jest równa

a) $3^2 \cdot \sqrt[4]{3}$

b) $\sqrt[4]{3^3}$

c) $3^2 + \sqrt[4]{3}$

d) $3^2 + \sqrt{3^4}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
 $\sqrt[2]{4} = 4^{\frac{1}{2}}$
 $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$$3^{2+\frac{1}{4}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3^2 \sqrt[4]{3}$$

2.4. (1 punkt)

Liczba $\sqrt[3]{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{81}{56}}$ jest równa

$$81 = 3^4 = 3 \cdot 3^3, 56 = 7 \cdot 8$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{3}{2\sqrt[3]{21}}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{9}{4}$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{81}{56}} &= \sqrt[3]{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3^3}{7 \cdot 8}} = \sqrt[3]{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3^3}{2^3}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2.5. (1 punkt)

Liczba $\frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{36^{10}}$ jest równa

a) 6^{70}

b) 6^{45}

c) $2^{30} \cdot 3^{20}$

d) $2^{10} \cdot 3^{20}$

Handwritten notes and arrows:

- An arrow points to option c) $2^{30} \cdot 3^{20}$, which is circled in orange. Below it is written $m+n$.
- Below the options, there are two boxed equations in orange:
 - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
 - $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- To the right of these boxes, there is an equation in orange: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- A blue arrow points from option d) $2^{10} \cdot 3^{20}$ to the boxed equations.

Handwritten solution:

$$\begin{aligned} \frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{36^{10}} &= \frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{(6 \cdot 6)^{10}} = \frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{(2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3)^{10}} = \\ &= \frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{(2^2 \cdot 3^2)^{10}} = \\ &= \frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{2^{20} \cdot 3^{20}} = 2^{30} \cdot 3^{20} \end{aligned}$$

Arrows in the solution indicate the simplification of the denominator: $6 \cdot 6 \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \rightarrow 2^2 \cdot 3^2$.

2.6. (1 punkt)

Liczby a i c są dodatnie. Liczba b stanowi 48% liczby a oraz 32% liczby c .

Wynika stąd, że

$a) \ c = 1,5a$

$b) \ c = 1,6a$

$c) \ c = 0,8a$

$d) \ c = 0,16a$

$b = 48\% \cdot a$

$b = 32\% \cdot c$

$b = \frac{48}{100} \cdot a$

$b = \frac{32}{100} \cdot c$

$\frac{48}{100} a = \frac{32}{100} c \quad | \cdot 100$

$\rightarrow 48a = 32c \quad | : 32$

$c = \frac{48}{32} a = \frac{6}{4} a = \frac{3}{2} a = 1\frac{1}{2} a = 1,5a$

2.7. (1 punkt)

Cenę x pewnego towaru obniżono o 20 % i otrzymano cenę y . Aby przywrócić cenę x , nową cenę y należy podnieść o

a) 25 %

b) 20 %

c) 15 %

d) 12 %

$$y = x - 20\% x$$

$$y = x - 0,2x$$

$$y = 0,8x$$

$$y \cdot z = x$$

$$0,8x \cdot z = x \quad / : x$$

$$0,8z = 1 \quad / : 0,8$$

$$z = \frac{1}{0,8} = 1,25 = 125\%$$

$$z = ?$$

2.8. (1 punkt)

Cena pewnego towaru wraz z 7-procentowym podatkiem VAT jest równa 34347 zł.

Cena tego samego towaru wraz z 23-procentowym podatkiem VAT będzie równa

a) 37236 zł

b) 39842,52 zł

c) 39483 zł

d) 42246,81 zł

X - cena BEZ VAT

$$2 \cdot 2 = 4$$
$$4 \cdot 1,23 = 4,92$$
$$34347 = 1,07 \cdot x \quad / : 1,07$$
$$x = \frac{34347}{1,07} = 32100$$
$$32100 \cdot 1,23 = 39483$$

2.9. (1 punkt)

Oprocentowanie na długoterminowej lokacie w pewnym banku wynosi 3 % w skali roku (już po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnego kapitału znajdującego się na lokacie – zgodnie z procentem składanym. **Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Po 10 latach oszczędzania w tym banku (i bez wypłacania kapitału ani odsetek w tym okresie) kwota na lokacie będzie większa od kwoty wpłaconej na samym początku o (w zaokrągleniu do 1%)

~~a) 30 %~~

b) 34 %

c) 36 %

d) 43 %

10 lat na 3%

1. + 3% $\cdot 1,03$

2. $\cdot 1,03$

3. $\cdot 1,03$

⋮
10

$\cdot 1,03$

$\times 10$

$1,03 \cdot 1,03 \cdot \dots$

$= 1,03^{10} = 1,3439\dots$

34,39... %

→ $\boxed{34\%}$

ZADANIA OTWARTE

2.10. (2 punkty)

Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

$$= 6^{98} (6^2 - 2 \cdot 6 + 10) =$$

$$= 6^{98} (36 - 12 + 10) =$$

$$= 6^{98} \cdot 34 = 6^{98} \cdot 2 \cdot 17$$

Obj. Jak widać liczba dzieli się przez 17.

$$a^m - a^m = a^{m+m}$$

2.11. (2 punkty)

Wykaż, że liczba $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17.

$$4^{2017} (1 + 4 + 4^2 + 4^3) =$$

$$= 4^{2017} (5 + 16 + 64) =$$

$$= 4^{2017} \cdot 85$$

$$\frac{85}{17} = 5$$

Odp. Liczba jest podzielna przez 17 bo $\frac{85}{17} = 5$

2.12. (1 punkt)

Zapisz w postaci jednej potęgi liczbę $100^5 \cdot (0,1)^{-6}$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\begin{aligned} 100^5 \cdot (0,1)^{-6} &= \\ &= (10^2)^5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-6} = 10^{10} \cdot \frac{1}{10^{-6}} = 10^{10} \cdot 10^6 = \\ &= 10^{16} \end{aligned}$$

2.13. (2 punkty)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność.

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} &= 3a^2 - 2ab + 3b^2 = \\ &= a^2 + 2a^2 - 2ab + b^2 + 2b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2 + 2b^2 = \\ &= (a-b)^2 + 2a^2 + 2b^2 \end{aligned}$$

Odp. To wyrażenie jest sumą kwadratów i dlatego jest NIEUjemne.

2.14. (2 punkty)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq a$, spełniona jest podana poniżej nierówność.

$$\frac{a^2 + b^2}{2} > \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} > \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \quad / \cdot 4$$

$$2(a^2 + b^2) > a^2 + 2ab + b^2$$

$$2a^2 + 2b^2 > a^2 + 2ab + b^2 \quad / \leftarrow$$

$$2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 > 0$$

$$a^2 + b^2 - 2ab > 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

$$(a - b)^2 > 0 \quad b \neq a$$

$$\text{to : } a - b \neq 0$$

Obp. Kwadrat każdej niezerowej liczby jest DODATNI.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2.15. (2 punkty)

Dane są dwie liczby x i y , takie, że iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x+y}{x}$. Wynik podaj bez niewymierności w mianowniku.

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x}{x} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \dots$$

Usuwanie niewymierności z mianownika

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{1^2 - (\sqrt{5})^2} = \\ &= \frac{-2-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{-(2+2\sqrt{5})}{-4} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \\ &= \frac{1}{2} (1+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

2.16. (2 punkty)

Dane są liczby $a = \sqrt{5} - 2$ i $b = \sqrt{5} + 2$. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \div \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

dla podanych a i b .

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \div \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} &= \frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \\ &= \frac{a \cdot b (a - b)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{a \cdot b \cancel{(a - b)}}{\cancel{(a - b)}} = a \cdot b = \\ &\quad \underbrace{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2} \quad = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = \\ &= 5 - 4 = 1 \end{aligned}$$

2.17. (3 punkty)

Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b , które spełniają warunki: $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz

$a^3 + b^3 = (a + b)^3$. Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b , spełniających powyższe warunki.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$\underline{a^3 + b^3} = \underline{a^3} + 3a^2b + 3ab^2 + \underline{b^3} \quad / -a^3 - b^3$$

$$0 = 3a^2b + 3ab^2 \quad / : 3$$

$$0 = a^2b + ab^2 \quad / : (a \cdot b)$$

$$0 = \frac{a^2b}{ab} + \frac{ab^2}{ab}$$

$$0 = a + b \quad / -b$$

$$-b = a \quad / : b$$

$$-1 = \frac{a}{b}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = -1}$$

$$\frac{b^2}{b} = \frac{b \cdot b}{b} = b$$

2.18. (3 punkty)

Rozważmy dwie kolejne liczby naturalne a i b takie, że obie są niepodzielne przez 3.

Udowodnij, że liczba $a^3 + b^3$ jest podzielna przez 9.

→ $(a+b)^3 = \dots$

→ $3 \cdot k$ - podzielna przez 3

$$\begin{cases} 3k+1 \\ 3k+2 \end{cases}$$

$$a = 3k+1$$

$$b = 3k+2$$

$$6 = 3 \cdot 2$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$8 = 3 \cdot 2 + 2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 = (3k+1)^3 = 27k^3 + 3 \cdot 9k^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3k \cdot 1^2 + 1^3 =$$
$$= 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$$

$$b^3 = (3k+2)^3 = 27k^3 + 3 \cdot 9k^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3k \cdot 4 + 2^3 =$$
$$= 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8$$

$$a^3 + b^3 = 54k^3 + 81k^2 + 45k + 9 =$$
$$= 9(6k^3 + 9k^2 + 5k + 1)$$

Odp. Z powyższego widać podzielność przez 9.

2.19. (2 punkty)

Liczba osobników pewnego zagrożonego wyginięciem gatunku zwierząt wzrosła w stosunku do liczby tych zwierząt z 31 grudnia 2011 r. o 120% i obecnie jest równa 8910. Ile zwierząt liczyła populacja tego gatunku w ostatnim dniu 2011 roku?

$$\begin{aligned}x &= ? \\8910 &= x + 120\% \cdot x \\8910 &= x + \frac{120}{100} x \\8910 &= x + 1,2x \\8910 &= 2,2x \quad / : 2,2 \\ \frac{8910}{2,2} &= x \\x &= 4050\end{aligned}$$

Odp. populacja liongta 31 XII 2011 4050 osobników.

2.20. (2 punkty) $\times$

Pensja pana X jest o 50% wyższa od średniej krajowej, a pensja pana Y jest o 40% niższa od średniej krajowej. Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y

- A. o 40% pensji pana Y.
- B. o 90% pensji pana Y.
- ☒ C. o 150% pensji pana Y.
- D. o 275% pensji pana Y.

$$\leftarrow x = \dots$$

2. Pensja pana Y jest niższa od pensji pana X

- ☒ E. o 60% pensji pana X.
- F. o 73% pensji pana X.
- G. o 90% pensji pana X.
- H. o 150% pensji pana X.

$$x = s + 50\% s = s + \frac{50}{100} s = s + \frac{1}{2} s = 1,5s$$
$$y = s - 40\% s = s - \frac{40}{100} s = s - 0,4s = 0,6s$$

$$x = 1,5s$$

$$y = 0,6s$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1,5s}{0,6s} = 2,5 / \cdot y$$

$$x = 2,5y = x + 1,5y = x + \frac{150}{100} y = y + 150\%$$

$$\frac{x}{2,5} = y$$

$$y = \frac{1}{2,5} x = 0,4x = x - 0,6x = x - \frac{60}{100} x = x - 60\%$$



zadanie	rozwiązanie
2.1 Inf.'23, 2, s. 13	a)
2.2 CKE 2013, 1, s. 2	a)
2.3 CKE 2022, 5, s. 2	a) $3^2 \cdot \sqrt[4]{3}$
2.4 CKE 2018, 2, s. 2	c) $\frac{3}{2}$
2.5 CKE 2020, 2, s. 2	c) $2^{30} \cdot 3^{20}$
2.6 CKE 2016, 3, s.2	a) $c = 1,5a$
2.7 CKE 2020, 4, s. 2	a) 25 %
2.8 CKE 2015s, 1, s. 2	c) 39483 zł
2.9 Inf.'23, 3, s. 14	b) 34 %
2.10 CKE 2013, 31, s. 15	$6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98} = 6^{98} \cdot (6^2 - 2 \cdot 6 + 10) = 6^{98} \cdot 2 \cdot 17$
2.11 CKE 2017, 27, s. 17	$4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020} = 4^{2017} \cdot 5 \cdot 17$
2.12. CKE 2021, 1, s.2	10^{16}
2.13 CKE 2019, 28, s.16	$(a - b)^2 \geq 0$ oraz $2a^2 + 2b^2 \geq 0$ dla a i b rzeczywistych
2.14 CKE 2022, 31, s.18	Nierówność po przekształceniach $(a - b)^2 > 0$, gdzie $a - b \neq 0$.
2.15 Inf.'23, 4, s. 15	$\frac{x+y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
2.16 Inf.'23, 5, s. 17	$\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \div \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = a \cdot b = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 1$
2.17 Inf.'23, 11, s. 25	$\frac{a}{b} = -1$
2.18 Inf.'23, 15, s. 31	$a = 3k + 1, b = 3k + 2, a^3 + b^3 = 9(6k^3 + 9k^2 + 5k + 1), k \in \{0, 1, 2, \dots\}$
2.19 CKE 2017, 4, s. 2	Populacja tego gatunku w ostatnim dniu 2011 roku liczyła 4050 zwierząt.
2.20 Inf.'23, 8, s. 22	Odpowiedzi: 1.C, 2.E.