



www.matpanda.pl

Matematyka poziom spokojny

3. Funkcje. Funkcja liniowa. Układy równań.

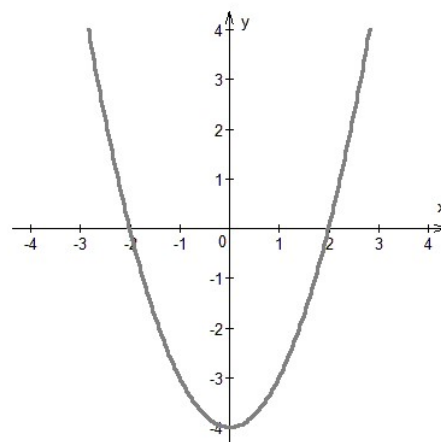
Funkcją nazywamy takie przyporządkowanie, które każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowuje dokładnie jeden element $y \in Y$ (zapis symboliczny funkcji $f: X \rightarrow Y$). Zbiór X nazywamy *dziedziną funkcji* i oznaczamy przez D (lub D_f), a każdy element dziedziny nazywamy *argumentem* funkcji. Zbiór Y nazywamy *przeciwdziedziną* funkcji i oznaczamy przez ZW (lub ZW_f). Zbiór tych elementów przeciwdziedziny, które zostały przyporządkowane elementom ze zbioru X nazywamy *zbiorem wartości*.

Wykresem $f: X \rightarrow Y$ jest zbiór wszystkich punktów o współrzędnych $(x, f(x))$, gdzie $x \in X$.

Argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość równą 0, nazywamy *miejscem zerowym* tej funkcji.

Rysunek obok pokazuje wykres funkcji $y = f(x) = x^2 - 4$.

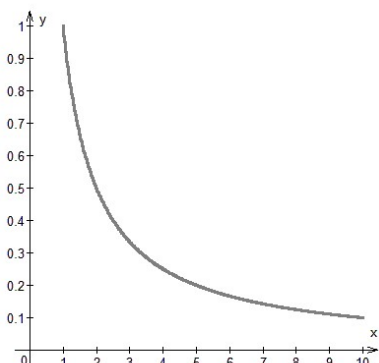
Rozwiązaniem równania $y = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) = 0$ są dwa miejsca zerowe tej funkcji: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 2$.



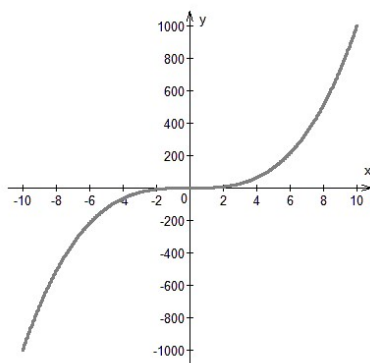
Dla dwóch dowolnych argumentów x_1 i x_2 funkcję f nazywamy:

- *rosnącą*, gdy spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$
- *niemalejącą*, gdy spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \leq f(x_2)$
- *malejącą*, gdy spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$
- *nierosnącą*, gdy spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \geq f(x_2)$

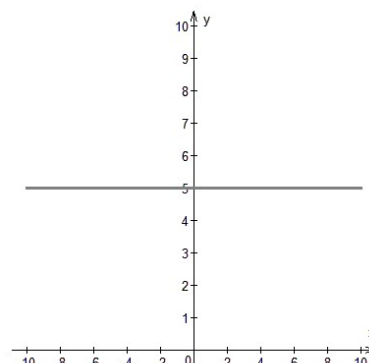
Funkcję, która dla każdego argumentu przyjmuje taką samą wartość, nazywamy funkcją *stałą*. Wyznaczanie *przedziałów monotoniczności* funkcji polega na określeniu przedziałów, w których jest ona rosnąca, malejąca, bądź stała. Przykłady wykresów funkcji:



malejącej $y = f(x) = x^{-1}$



rosnącej $y = f(x) = x^3$

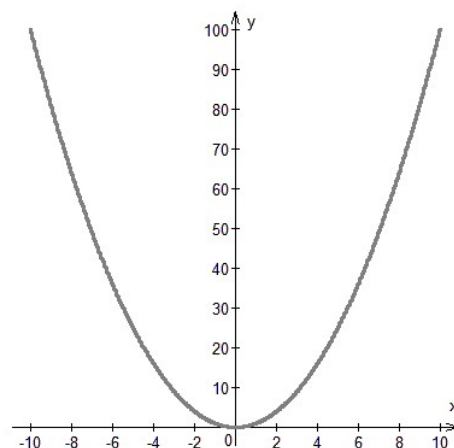


stałej $y = f(x) = 5$

Funkcję nazywamy *parzystą*, gdy dla każdego argumentu x , liczba $-x$ także należy do dziedziny oraz zachodzi równość $f(x) = f(-x)$.

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY .

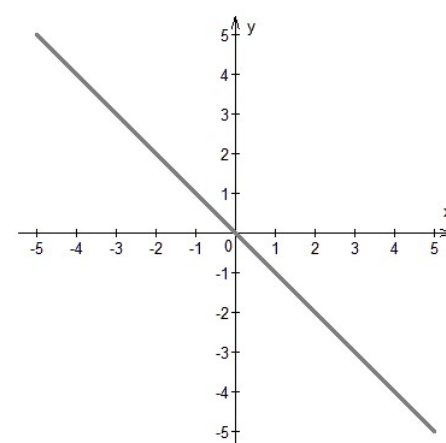
Przykładem funkcji parzystej jest pokazany obok wykres funkcji kwadratowej $y = f(x) = x^2$.



Funkcję nazywamy *nieparzystą*, jeśli dla każdego argumentu x liczba $-x$ także należy do dziedziny oraz zachodzi równość $f(-x) = -f(x)$.

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych $(0, 0)$.

Przykładem funkcji nieparzystej jest pokazany obok wykres funkcji liniowej $y = f(x) = -x$.



Funkcję nazywamy *różnowartościową*, jeżeli dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 spełniony jest warunek:

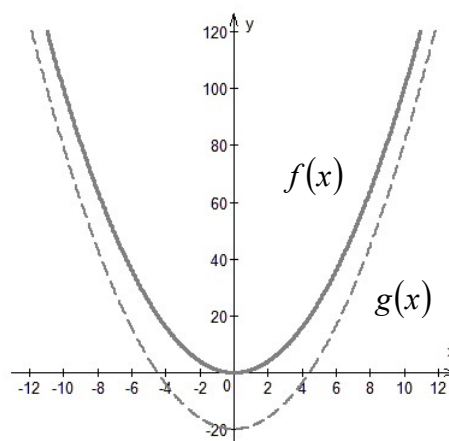
$$\text{jeśli } x_1 \neq x_2, \text{ to } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY .

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w górę wzdłuż osi OY .

Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w dół wzdłuż osi OY .

Wykres obok pokazuje przesunięcie wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = x^2$ o 20 jednostek w dół wzdłuż osi OY . Powstaje przez to funkcja $g(x) = x^2 - 20$.

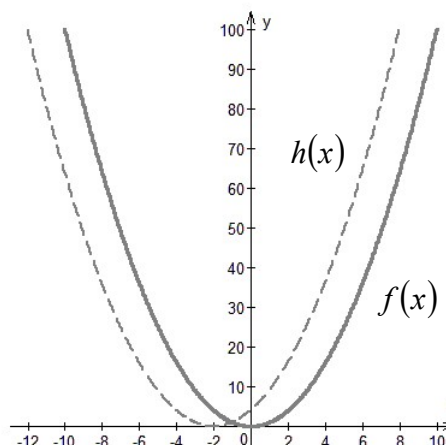


Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX .

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX .

Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w lewo wzdłuż osi OX .

Wykres obok pokazuje przesunięcie wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = x^2$ o 2 jednostki w lewo wzdłuż osi OX . Powstaje przez to funkcja $h(x) = (x + 2)^2$.



Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ dla $p > 0$ i $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX i q jednostek w górę wzdłuż osi OY .

Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi układu współrzędnych.

Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy, odbijając wykres funkcji $y = f(x)$ symetrycznie względem osi OX . Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy, odbijając wykres funkcji $y = f(x)$ symetrycznie względem osi OY .

Funkcja liniowa

Funkcją liniową nazywamy funkcję określoną wzorem

$$f(x) = ax + b,$$

gdzie $x \in \mathbf{R}$, a i b są stałymi ($a, b \in \mathbf{R}$). Wykresem funkcji liniowej jest prosta.

Równanie $y = ax + b$ nazywamy *równaniem kierunkowym prostej*, w którym współczynnik a nazywamy *współczynnikiem kierunkowym prostej*, a współczynnik b – *wyrazem wolnym*.

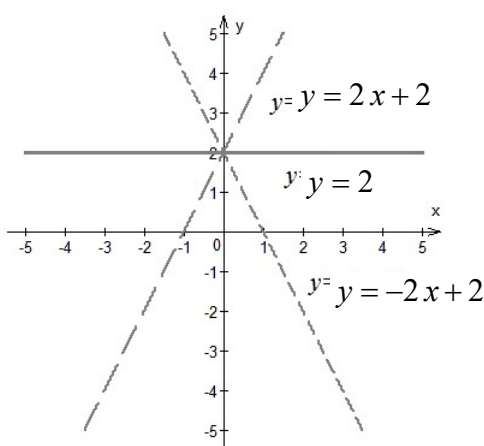
Równanie $y = ax + b$ można przekształcić do postaci $Ax + By + C = 0$ nazywanej *równaniem ogólnym prostej* (gdzie współczynniki: $A \neq 0$ lub $B \neq 0$).

Jeśli prosta przechodzi przez punkt (x_A, y_A) , to współrzędne tego punktu spełniają równanie prostej $y_A = ax_A + b$. Jeśli prosta przechodzi przez dwa różne punkty (x_A, y_A) i (x_B, y_B) , to współczynnik kierunkowy tej prostej wyrażony jest wzorem

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Współczynnik kierunkowy określa nachylenie prostej będącej wykresem funkcji do osi OX .

- Gdy $a > 0$, to funkcja liniowa jest rosnąca.
- Gdy $a = 0$, to funkcja liniowa jest stała (prosta jest równoległa do osi OX).
- Gdy $a < 0$, to funkcja liniowa jest malejąca.

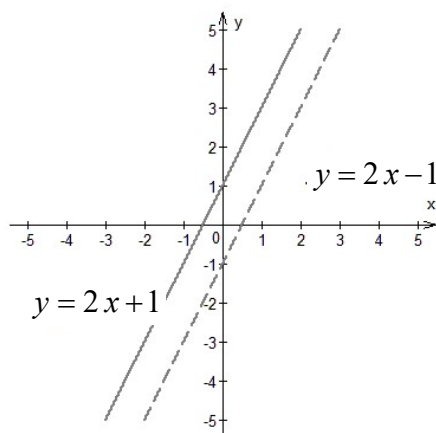


Jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa ma jedno miejsce zerowe $x = -\frac{b}{a}$.

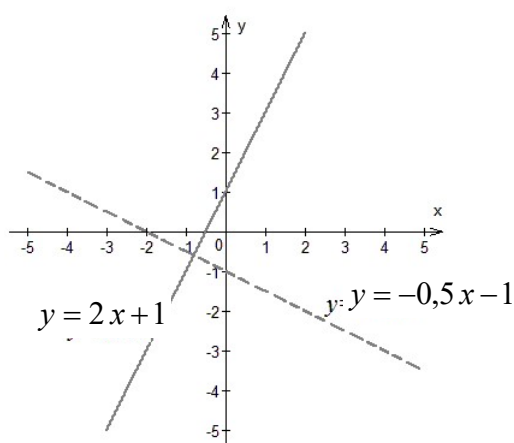
Prosta będąca wykresem funkcji liniowej przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

Gdy $b = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Wykresy funkcji liniowych ($y = a_1 x + b_1$ i $y = a_2 x + b_2$) z tym samym współczynnikiem kierunkowym (czyli wtedy, gdy $a_1 = a_2$) są prostymi równoległymi.



Proste $y = a_1 x + b_1$ i $y = a_2 x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = \frac{-1}{a_2}$ ($a_2 \neq 0$).



Równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ zapisujemy w postaci

$$(y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A).$$

Wykonując przekształcenie i wprowadzając współczynnik kierunkowy otrzymujemy równanie

$$(y - y_A) = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} (x - x_A) = a(x - x_A).$$

Po kolejnych przekształceniach otrzymujemy równanie kierunkowe prostej

$$y = ax - ax_A + y_A, \text{ gdzie } a = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}.$$

Układ dwóch równań pierwszego stopnia (równań liniowych)

Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi zapisujemy w postaci:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \quad \text{gdzie} \quad \begin{matrix} a_1 \neq 0 \text{ lub } b_1 \neq 0 \\ a_2 \neq 0 \text{ lub } b_2 \neq 0 \end{matrix}$$

Liczba rozwiązań układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi:

- Układ dwóch równań liniowych, którego rozwiązaniem jest jedna para liczb

$$\{(x_0, y_0)\},$$

nazywamy *układem oznaczonym* lub układem równań liniowych *niezależnych*.

Układ dwóch równań liniowych jest niezależny, gdy spełniony jest warunek

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad (\text{dla } a_2 \neq 0, b_2 \neq 0).$$

- Układ równań liniowych, który ma nieskończenie wiele rozwiązań

$$\{(x, y): a_1 x + b_1 y = c_1, \quad x, y \in \mathbf{R}\},$$

nazywamy *układem nieoznaczonym* lub układem równań liniowych *zależnych*.

Układ dwóch równań liniowych jest zależny, gdy spełniony jest warunek

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{dla } a_2 \neq 0, b_2 \neq 0, c_2 \neq 0).$$

- Układ równań liniowych, który nie ma rozwiązań, nazywamy *układem sprzecznym*.

Układ dwóch równań liniowych jest spreczny, gdy spełniony jest warunek

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{dla } a_2 \neq 0, b_2 \neq 0, c_2 \neq 0).$$

Metody rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi:

- metoda podstawiania,
- metoda przeciwnych współczynników,
- metoda graficzna.

Metoda podstawiania polega na wyznaczeniu jednej niewiadomej z jednego równania i podstawieniu otrzymanego wyrażenia do drugiego równania, w miejsce tej niewiadomej. Otrzymuje się wtedy równanie z jedną niewiadomą. Po wyznaczeniu pierwszej z szukanych liczb, drugą znajduje się po podstawieniu tej znalezionej do dowolnego z równań.

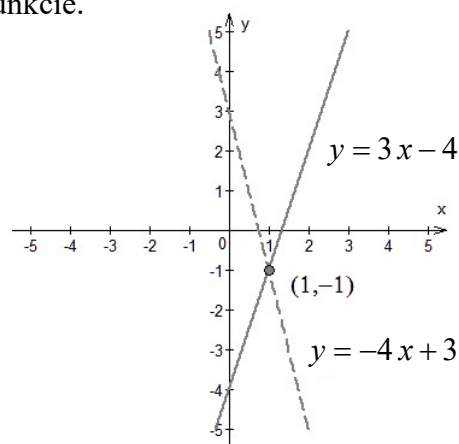
Metoda przeciwnych współczynników polega na pomnożeniu obu stron jednego z równań przez tak dobraną liczbę, by uzyskać przeciwny niż w drugim równaniu współczynnik przy wybranej niewiadomej. Następnie należy dodać równania do siebie stronami, by wybrana niewiadoma zredukowała się. W ten sposób otrzymuje się równanie z jedną niewiadomą.

Układ równań liniowych można interpretować geometrycznie i rozwiązać go *metodą graficzną*. Układ dwóch równań liniowych przedstawia się jako dwie proste w jednym układzie współrzędnych. Rozwiązaniem układu równań są współrzędne punktu, w którym proste przecinają się.

Układ dwóch równań liniowych jest *układem oznaczonym* wtedy i tylko wtedy, gdy proste opisane równaniami tego układu przecinają się w jednym punkcie.

Przykład:
$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = -4x + 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$



Układ dwóch równań liniowych jest *układem nieoznaczonym* wtedy i tylko wtedy, gdy proste opisane równaniami tego układu pokrywają się. Istnieje wtedy nieskończenie wiele punktów, których współrzędne należą jednocześnie do obu prostych. Proste takie reprezentują układ równań zależnych, mający nieskończenie wiele rozwiązań.

Układ dwóch równań liniowych jest *układem sprzecznym* wtedy i tylko wtedy, gdy proste opisane równaniami tego układu to dwie różne proste równoległe.

Przykład:
$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

