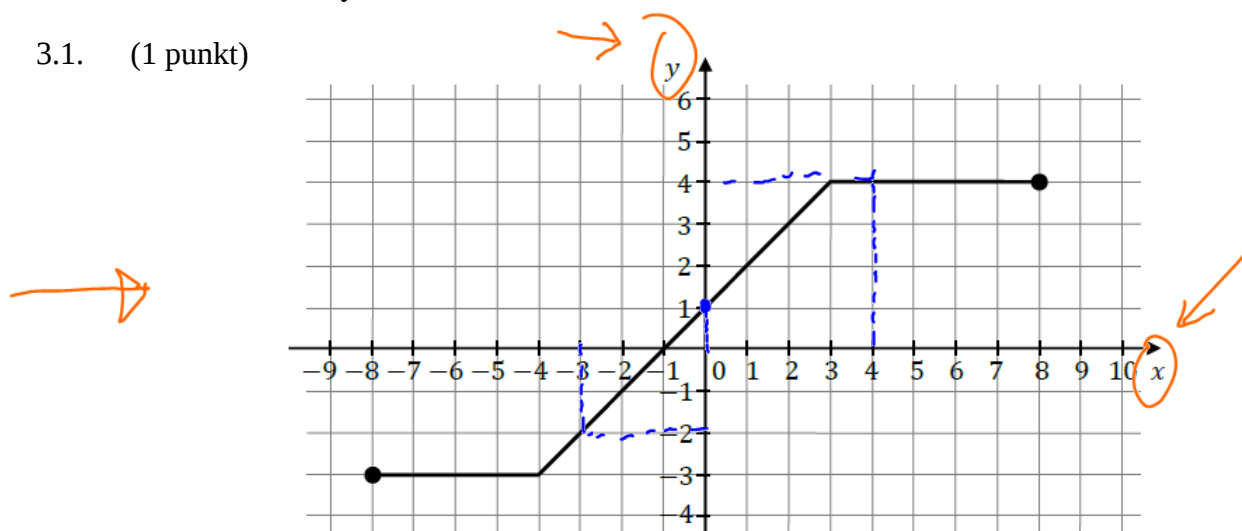


Matematyka poziom spokojny

3. Funkcje. Funkcja liniowa. Układy równań. ZADANIA

ZADANIA ZAMKNIĘTE

3.1. (1 punkt)



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Iloczyn $f(-3) \cdot f(0) \cdot f(4)$ jest równy

a) (-12)

b) (-8)

c) 0

d) 16

$$y = f(-3) = ?$$

$$f(-3) = -2$$

$$f(0) = 1$$

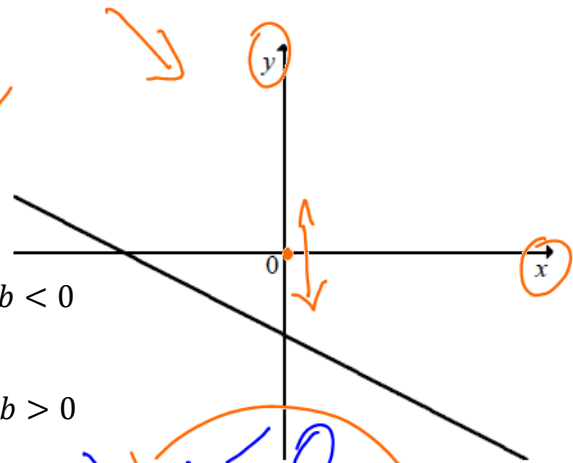
$$f(4) = 4$$

$$-2 \cdot 1 \cdot 4 = -8$$

3.2. (1 punkt)

Na rysunku przedstawiony jest
fragment wykresu pewnej funkcji
liniowej $y = ax + b$.

Jakie znaki mają współczynniki a i b ?



a) $a < 0$ i $b < 0$ c) $a > 0$ i $b < 0$

b) $a < 0$ i $b > 0$ d) $a > 0$ i $b > 0$

- funkcja malejąca $\Rightarrow a < 0$
- — " — kciwnie v dół $\Rightarrow b < 0$

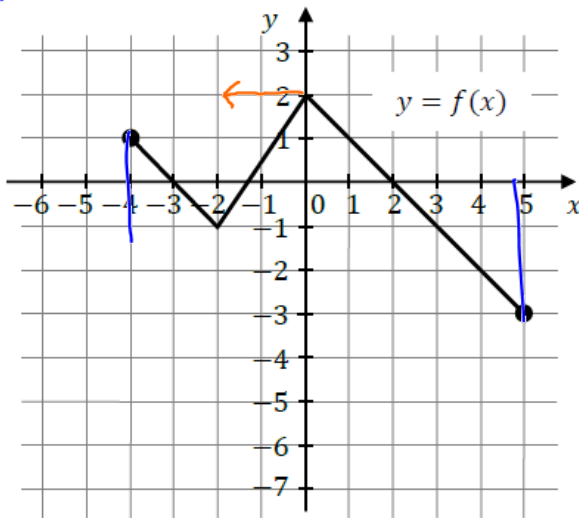
3.3. (1 punkt)

Na rysunku 1. przedstawiono wykres funkcji f określonej na zbiorze $\langle -4, 5 \rangle$.

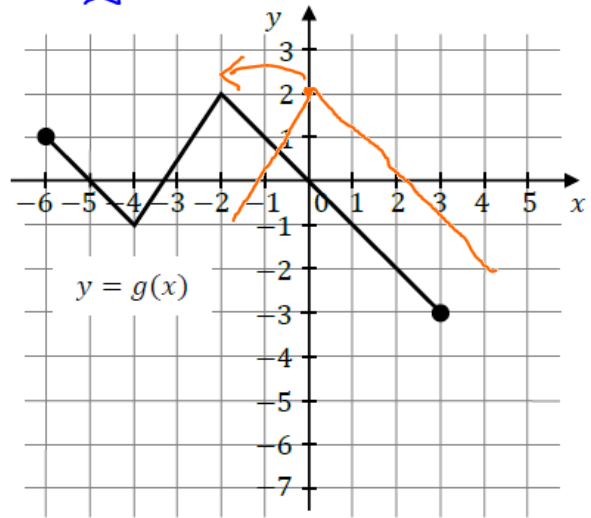
Funkcję g określono za pomocą funkcji f .

Wykres funkcji g przedstawiono na rysunku 2.

Rysunek 1.



Rysunek 2.

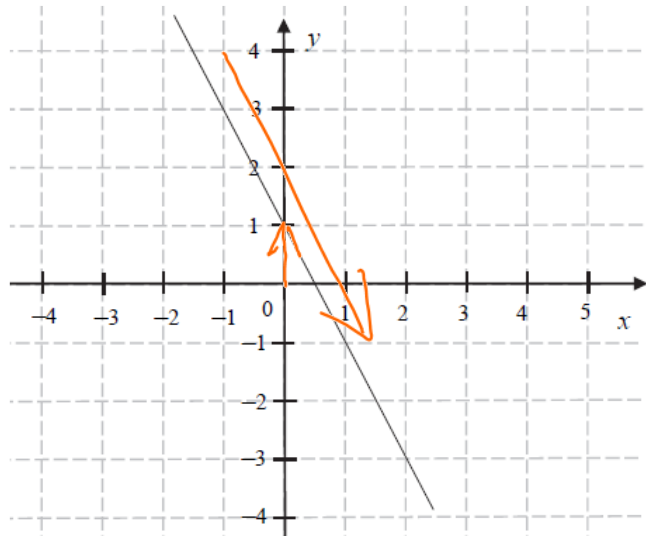


Wynika stąd, że

- a) $g(x) = f(x) - 2$ ↓
- b) $g(x) = f(x) + 2$ ↑
- c) $g(x) = f(x - 2)$ →
- d) $g(x) = f(x + 2)$ ←

- 3.4. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = ax + b$. Współczynniki a oraz b we wzorze funkcji f spełniają zależność:

- a) $a + b > 0$ b) $a + b = 0$
 c) $a \cdot b > 0$ d) $a \cdot b < 0$



$a > 0 \Rightarrow f.$ rosnąca
 $a < 0 \Rightarrow f.$ malejąca
 $b > 0 \Rightarrow f.$ ↑
 $b < 0 \Rightarrow f.$ ↓

$$a \cdot b < 0$$

3.5. (1 punkt)

0
||
└──────────┘

Miejszem zerowym funkcji liniowej $f(x) = \sqrt{3}(x+1) - 12$ jest liczba:

a) $\sqrt{3} - 4$

b) $-2\sqrt{3} + 1$

c) $4\sqrt{3} - 1$

d) $-\sqrt{3} + 12$

$f(x) = 0 \quad x = ?$

$\sqrt{3}(x+1) - 12 = 0 \quad / + 12$

$\sqrt{3}(x+1) = 12 \quad / : \sqrt{3}$

$x+1 = \frac{12}{\sqrt{3}} \quad / - 1$

$x = \frac{12}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} - 1 = \frac{12\sqrt{3}}{3} - 1 =$

$= 4\sqrt{3} - 1$



3.6. (1 punkt)

Miejscem zerowym funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = -\frac{1}{3}(x+3) + 5$ jest liczba

a) (-3)

b) $\frac{9}{2}$

c) 5

d) 12

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 & x &= ? \\ -\frac{1}{3}(x+3) + 5 &= 0 & / -5 \\ -\frac{1}{3}(x+3) &= -5 & / \cdot -3 \\ x+3 &= 15 & / -3 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

3.7. (1 punkt)

Prosta o równaniu $y = -2x + (3m+3)$ przecina w układzie współrzędnych oś OY w punkcie $(0,2)$. Wtedy:

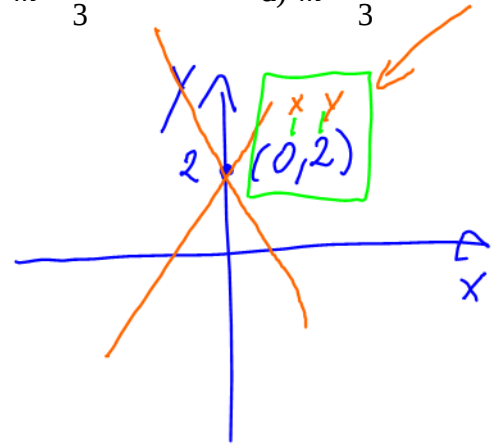
a) $m = -\frac{3}{2}$

b) $m = -\frac{1}{3}$

c) $m = \frac{1}{3}$

d) $m = \frac{5}{3}$

$$\begin{aligned} y &= -2x + (3m+3) \\ 2 &= -2 \cdot 0 + 3m + 3 \\ 2 &= 3m + 3 \quad / -3 \\ -1 &= 3m \quad / :3 \\ m &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$



3.8. (1 punkt)

Punkty $A = (-2, 6)$ oraz $B = (3, b)$ leżą na prostej, która przechodzi przez początek układu współrzędnych. Wtedy b jest równe

a) 9

b) (-9)

c) (-4)

d) 4

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ 0 &= a \cdot 0 + b \\ 0 &= 0 + b \\ b &= 0 \end{aligned}$$

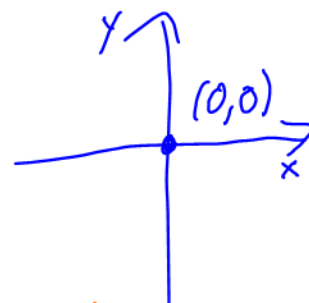
$$y = ax$$

$$\begin{aligned} 6 &= a(-2) \quad / : -2 \\ \frac{6}{-2} &= a \\ a &= -3 \end{aligned}$$

$$y = -3x$$

$$b = -3 \cdot 3$$

$$b = -9$$



3.9. (1 punkt)

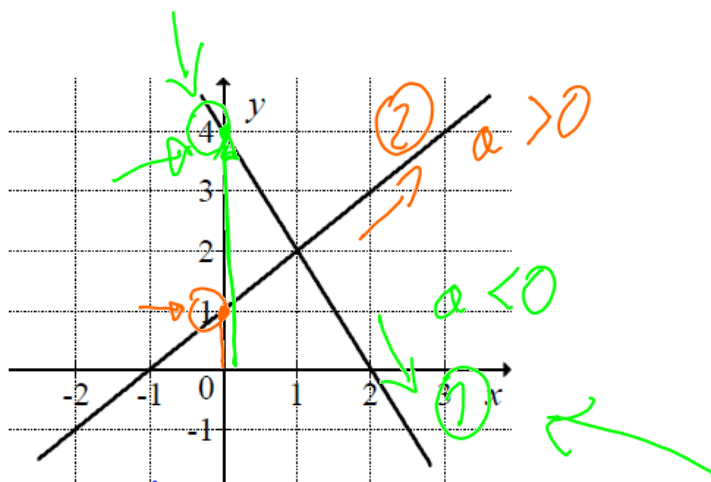
Na rysunku przedstawiono geometryczną interpretację jednego z niżej zapisanych układów równań. Wskaż ten układ.

a) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$



$y = ax + b$

① $y = -2x + 4$

② $y = x + 1$

3.10. (1 punkt)

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 11x - 11y = 1 \\ 22x + 22y = -1 \end{cases}$ jest para liczb: $x = x_0, y = y_0$.

Wtedy

- a) $x_0 > 0$ i $y_0 > 0$
- b) $x_0 > 0$ i $y_0 < 0$
- c) $x_0 < 0$ i $y_0 > 0$
- d) $x_0 < 0$ i $y_0 < 0$

$$11x - 11y = 1 \quad / + 11y$$

$$11x = 1 + 11y \quad / : 11$$

$$x = \frac{1}{11} + y$$

$$22\left(\frac{1}{11} + y\right) + 22y = -1$$

$$2 + 22y + 22y = -1 \quad / -2$$

$$44y = -1 - 2$$

$$44y = -3 \quad / : 44$$

$$y = -\frac{3}{44} \quad \leftarrow \quad x = \frac{1}{11} + y$$

$$x = \frac{1}{11} - \frac{3}{44} =$$

$$= \frac{4}{44} - \frac{3}{44} = \frac{1}{44}$$

METODA PRZECIWNYCH WSP.

$$\begin{cases} 11x - 11y = 1 \quad / \cdot 2 \\ 22x + 22y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22x - 22y = 2 \\ 22x + 22y = -1 \end{cases} \quad +$$

$$44x + 0 = 1$$

$$44x = 1 \quad / : 44$$

$$x = \frac{1}{44}$$

$$11 \cdot \frac{1}{44} - 11y = 1$$

$$\frac{1}{4} - 11y = 1 \quad / - \frac{1}{4}$$

$$-11y = 1 - \frac{1}{4}$$

$$-11y = \frac{3}{4} \quad / : -11$$

$$y = -\frac{\frac{3}{4}}{11} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{11} =$$

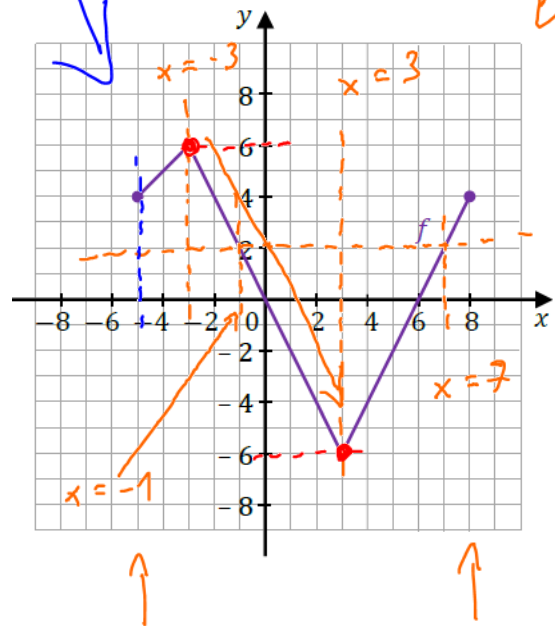
$$y = -\frac{3}{44}$$

ZADANIA OTWARTE

3.11. (3 punkty)

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.

Ta funkcja jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \in [-5, 8]$.



$$f(x) > 2$$

$$x \in [-5, -1) \cup (7, 8]$$

3.11.1. Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$

.....



3.11.2. Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej maksymalny przedział lub maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

$$\dots\dots\dots$$
$$x \in [-3, 3]$$

3.11.3. Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdanie było prawdziwe.

[Największa wartość funkcji f jest równa liczbie⁶ , a najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie⁻⁶ .

3.12. (2 punkty)

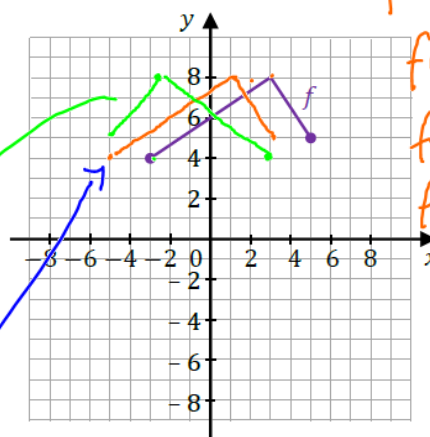
Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.

Ta funkcja jest określona dla $x \in [-3, 5]$.

Funkcje g oraz h są określone za pomocą funkcji f następująco:

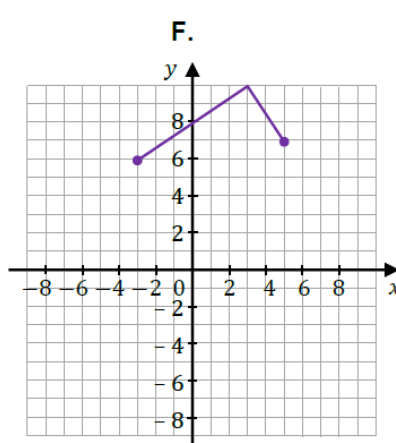
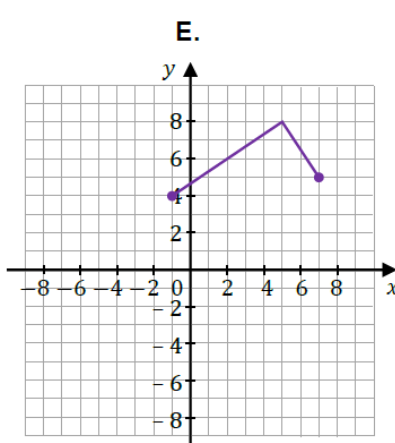
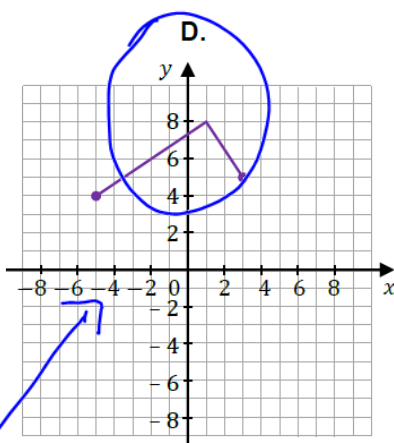
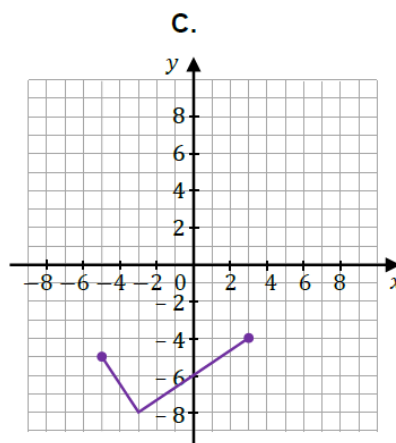
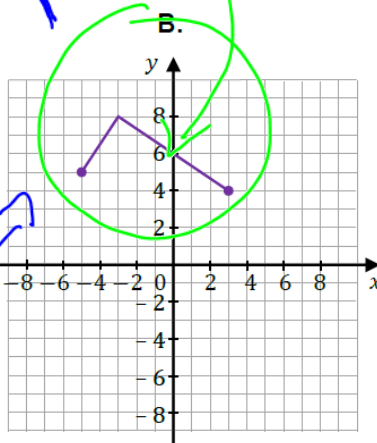
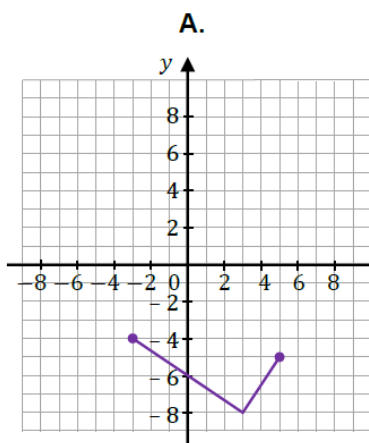
$$y = g(x) = f(x + 2)$$

$$y = h(x) = f(-x)$$



$f(x)+2 \uparrow$
 $f(x)-2 \downarrow$
 $f(x-2) \rightarrow$
 $f(x+2) \leftarrow$

Na rysunkach A–F przedstawiono wykresy różnych funkcji, w tym wykresy funkcji g oraz h .



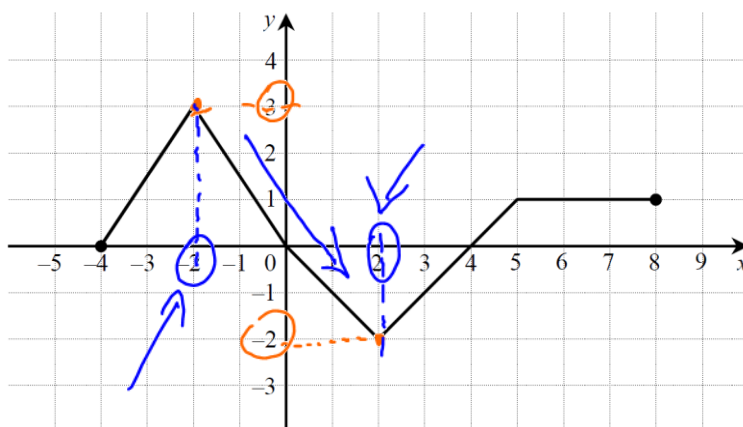
Każdej z funkcji $y = g(x)$ oraz $y = h(x)$ przyporządkuj jej wykres.

Wpisz obok symboli funkcji w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–F.

nr zadania	funkcja	rysunek
3.12.1	$y = g(x)$	D
3.12.2	$y = h(x)$	B

3.13. (2 punkty)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Odczytaj z wykresu i zapisz:

- a) zbiór wartości funkcji f ,
- b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

a) Zbiór wartości f to $\langle -2, 3 \rangle$ ←
 $[-2, 3]$

b) Funkcja maleje w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$ ←
 $[-2, 2]$

3.14. (1 punkt) ②

Dane są cztery proste k , l , m , n o równaniach:

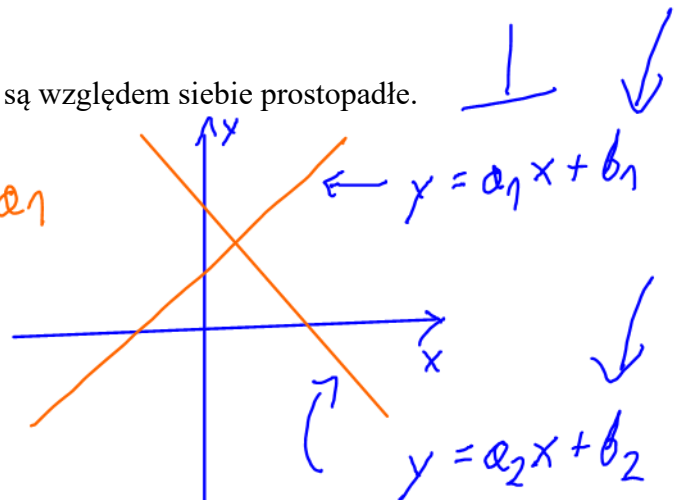
$$\begin{cases} k: y = -x + 1 \\ l: y = \frac{2}{3}x + 1 \\ m: y = -\frac{3}{2}x + 4 \\ n: y = -\frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$$

$$y = ax + b$$

Wśród prostych k , l , m , n wskaż te, które są względem siebie prostopadłe.

$$\perp : a_1 \cdot a_2 = -1 \quad / : a_1$$

$$\Rightarrow a_2 = -\frac{1}{a_1}$$



$$k: y = -x + 1 \quad a_1 = -1, a_2 = -\frac{1}{-1} = 1$$

$$m: y = -\frac{2}{3}x - 1 \quad a_1 = -\frac{2}{3}, a_2 = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$l: y = \frac{2}{3}x + 1 \quad a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

Prostopadłe są proste l i m .

3.15. (2 punkty) → 3

W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-43, -12)$, $B = (50, 19)$.

Prosta AB przecina oś OX w punkcie P .

Oblicz pierwszą współrzędną punktu P .

→ $y = ax + b$

→ $\begin{cases} -12 = -a \cdot 43 + b \\ 19 = a \cdot 50 + b \end{cases} \quad | -1$

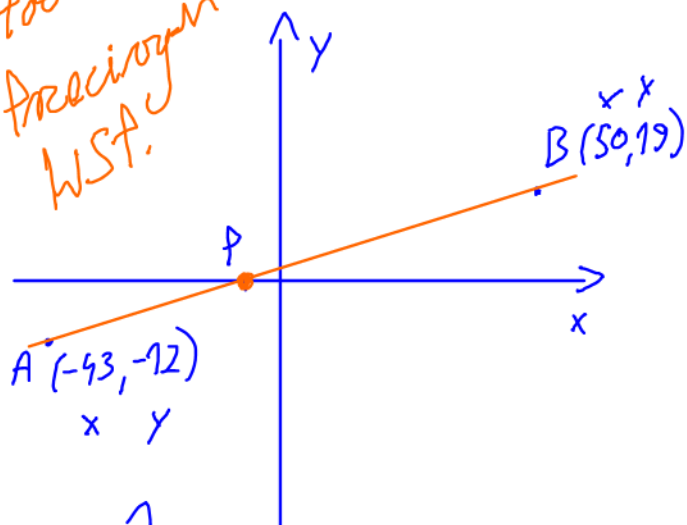
→ $\begin{cases} 12 = 43a - b \\ 19 = 50a + b \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftarrow -b \\ \leftarrow +b \end{matrix}$

+ $\begin{cases} 12 = 43a - b \\ 19 = 50a + b \end{cases}$

$31 = 93a \quad | : 93$

$a = \frac{1}{3}$

Metoda
Przecięcia
WSP.



→ $a = \frac{1}{3}$

$19 = \frac{1}{3} \cdot 50 + b$

$19 = \frac{50}{3} + b \quad | - \frac{50}{3}$

$19 - \frac{50}{3} = b$

$b = \frac{57}{3} - \frac{50}{3} = \frac{57-50}{3} = \frac{7}{3} = b$

AB: $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

$0 = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \quad | - \frac{7}{3}$

$-\frac{7}{3} = \frac{1}{3}x \quad | \cdot 3 \Rightarrow$

$x = -7$

Pierwsza wsp. punktu P wynosi $x = -7$.

3.16. (2 punkty)

Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy $\frac{4}{7}$, a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Wyznacz ten ułamek.

$$\left(\frac{x}{y} \right)$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

$$\begin{cases} \frac{x + \frac{1}{2}x}{y + \frac{1}{2}x} = \frac{4}{7} \\ \frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7(x + \frac{1}{2}x) = 4(y + \frac{1}{2}x) \\ 2(x+1) = y+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 \cdot \frac{3}{2}x = 4y + 2x \\ 2x + 2 = y + 1 \quad / -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{21}{2}x = 4y + 2x \\ 2x + 1 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10\frac{1}{2}x = 4y + 2x \quad / -2x \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\frac{1}{2}x = 4y \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\frac{1}{2}x = 4(2x+1) \\ y = 2x+1 \end{cases}$$

$$8\frac{1}{2}x = 8x + 4 \quad / -8x$$

$$\frac{1}{2}x = 4 \quad / \cdot 2$$

$$x = 8$$

$$y = 2 \cdot 8 + 1 = 17$$

Op. Nasz ułamek to $\frac{8}{17}$



3.1. CKE 2022, 9, s.4	b) (-8)
3.2. CKE 2013, 9, s. 4	a) $a < 0$ i $b < 0$
3.3. CKE 2022, 10, s.6	d) $g(x) = f(x + 2)$
3.4 CKE 2020, 11, s. 6	d) $a \cdot b < 0$
3.5. CKE 2017, 9 s.4	c) $4\sqrt{3} - 1$
3.6. CKE 2022, 11, s.8	d) 12
3.7. CKE 2010, 9, s.4	b) $m = -\frac{1}{3}$
3.8. CKE 2022, 21, s.12	b) (-9)
3.9. CKE 2014, 1, s. 3	a) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$
3.10. CKE 2022, 6, s.4	b) $x_0 > 0$ i $y_0 < 0$
3.11. Inf CKE*23p 19.1-3, s. 29-40	3.11.1. Przedział $[-5, -1) \cup (7, 8]$. 3.11.2. Funkcja f jest malejąca w przedziale $[-3, 3]$. 3.11.3. Największa wartość funkcji f jest równa liczbie 6, a najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie -6 .
3.12. Inf CKE*23p 20 s.41	3.12.1 – rysunek D. 3.12.2 – rysunek B.
3.13. CKE 2011, 26, s.11	a) $\langle -2, 3 \rangle$, b) $\langle -2, 2 \rangle$
3.14. CKE 2022, 22, s.12	Proste l oraz m są względem siebie prostopadłe.
3.15. CKE 2015n, 30, s.16	Pierwsza współrzędna punktu P jest miejscem zerowym funkcji liniowej $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. Rozwiązaniem równania $\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} = 0$ jest $x = -7$.
3.16. CKE 2015n, 31, s.17	Szukany ułamek to $\frac{8}{17}$.