



www.matpanda.pl

Matematyka poziom spokojny

1. Nierówności i zbiory TEORIA

Matematyka, którą poznajemy na lekcjach, a także zadania rozwiązywane podczas sprawdzianów w szkole i egzaminu maturalnego to świat liczb, zależności wyrażonych funkcjami i wykresów prezentujących te funkcje w postaci graficznej. By sprawnie wykonywać obliczenia, warto przypomnieć podstawowe wiadomości o zbiorach liczbowych i działaniach matematycznych. Tytuł pierwszego spotkania nawiązuje do liczb naturalnych, liczb całkowitych i liczb wymiernych, a także do działań na ułamkach i użycia nawiasów.

Czym jest liczba? Co to jest punkt? Jak zdefiniować zbiór? Tego na lekcjach matematyki się nie określa, tłumacząc, że liczba, punkt albo zbiór są pojęciami pierwotnymi. Uznajemy ich znaczenie za oczywiste lub powszechnie znane. Rozpocznijmy kurs MAT Pandy od przypomnienia symboli pozwalających zapisać relacje występujące pomiędzy „pojęciami pierwotnymi”.

Aby opisać zbiór, nazwijmy go dużą literą np. A , B lub C , należy określić, jakie są jego elementy.

Możemy elementy zbioru A po kolei wymieniwać, w tym celu, w nawiasach klamrowych podajemy elementy (w tym przykładzie zbiorem są litery alfabetu, od litery a , aż do litery z): $A = \{a, b, \dots, z\}$.

Możemy zapisać zbiór B składający się z elementów b i podać cechy, które je charakteryzują, np. $B = \{b: \text{litery alfabetu będące spółgłoskami}\}$.

Na lekcjach matematyki zazwyczaj wykonujemy działania na zbiorach liczbowych i już na następnych stronach tylko takimi zbiorami będziemy się zajmować. Potrzebujemy jednak jeszcze kilku znaków opisujących działania na zbiorach i ich wzajemne relacje.

Zbiorem pustym (oznaczenie \emptyset) nazywamy zbiór, do którego nie należy żaden element.

Zbiór, który ma skończoną liczbę elementów nazywany jest **zbiorem skończonym**; zbiór, do którego należy nieskończenie wiele elementów nazywany jest **zbiorem nieskończonym**.

Zbiory A i B nazywamy równymi (zapisujemy $A = B$) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A należy do zbioru B i każdy element zbioru B należy do zbioru A .

Zbiór A zawiera się w zbiorze B (zapisujemy $A \subset B$) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Zbiór A nazywany jest *podzbiorem* zbioru B .

Zbiory A i B są rozłączne wtedy i tylko wtedy, gdy nie mają wspólnych elementów: $A \cap B = \emptyset$

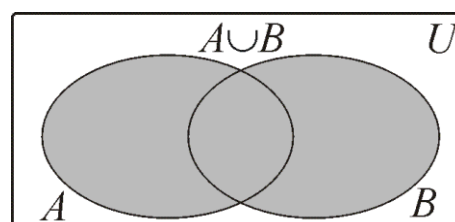
Zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru. Każdy zbiór jest swoim podzbiorem.

Zbiór A jest *podzbiorem właściwym* zbioru B , jeżeli $A \subset B$ i $A \neq B$.

Wygodną formą przedstawiania działań na zbiorach są diagramy. Zbiór wszystkich elementów nazywa się przestrzenią (na poniższych diagramach oznaczoną przez „ U ”).

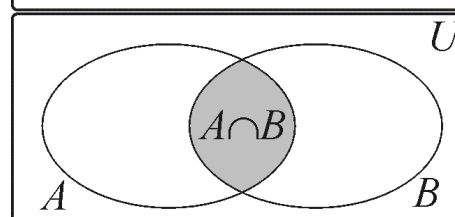
Sumą mnogościową zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do co najmniej jednego z tych zbiorów.

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ lub } x \in B\}$$



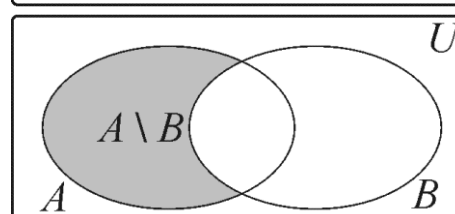
Iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów.

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ i } x \in B\}$$



Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B .

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ i } x \notin B\}$$



W symbolicznym zapisie pojawił się znak \in , który oznacza, że element x należy do zbioru A , a wyrażenie $x \in A$ jest zdaniem logicznym, które może być **prawdziwe** albo **falszywe**.

W nawiasach klamrowych definiujemy elementy zbioru, który powstaje po wykonaniu

działania (sumy, iloczynu, różnicy), a elementy tego nowego zbioru charakteryzujemy dwoma prostymi zdaniami logicznymi połączonymi spójnikiem. Spójnik „**lub**” (symbol \vee) daje złożone zdanie logiczne, które jest prawdziwe, gdy jedno lub oba zdania składowe są prawdziwe (w przeciwnym wypadku, czyli gdy oba zdania składowe są fałszywe, to zdanie złożone też jest fałszywe). Spójnik „**i**” (symbol \wedge) daje złożone zdanie logiczne, które jest prawdziwe tylko wtedy, gdy oba zdania składowe są prawdziwe (w każdym innym wypadku, gdy jedno lub oba zdania składowe są fałszywe, to zdanie złożone ze spójnikiem „i” także jest fałszywe).

Zbiory liczbowe i ich własności

- zbiór liczb naturalnych $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- zbiór liczb całkowitych $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- zbiór liczb wymiernych $\mathbf{Q} = \left\{x: x = \frac{p}{q} \wedge p \in \mathbf{Z} \wedge q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\right\}$
- zbiór liczb rzeczywistych \mathbf{R} - zawiera powyższe zbiory: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$
- zbiór liczb niewymiernych, to zbiór wszystkich liczb, które nie są wymierne

$$\mathbf{IQ} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$$

Oznaczenia zbiorów liczbowych zapisano pogrubioną czcionką, by wyróżniały się w tekście skryptu. Zbiór liczb naturalnych obejmuje liczby całkowite nieujemne. Do tego zbioru należy liczba zero. Dzięki liczbie zero możemy wykonać np. następujące działanie odejmowania

$$5 - 5 = 0$$

jednak w przypadku, gdy liczba odejmowana jest większa od pierwszej liczby w równaniu

$$5 - 6 = -1$$

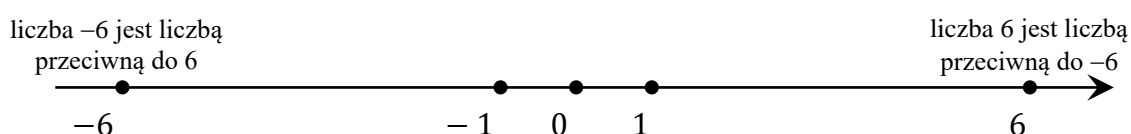
pojawia się problem, gdyż liczba -1 do zbioru liczb naturalnych nie należy. Potrzebny jest zbiór liczb całkowitych, w którym liczby naturalne zawierają się

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$$

Wykonując działania dodawania i odejmowania liczb całkowitych wynik, który otrzymamy, też będzie należał do zbioru liczb całkowitych. Odejmowanie możemy także zapisać jako dodawanie do odjemnej liczby przeciwnej do odjemnika. Wspomniana liczba przeciwna to liczba leżąca po przeciwnej stronie względem zera; możemy przyjąć, że jest to liczba o przeciwnym znaku, a działanie odejmowania można zapisać w sposób podany poniżej.

$$5 - 6 = 5 + (-6) = -1$$

Liczby całkowite możemy graficznie zaznaczyć na nieskończonej prostej jako punkty, pomiędzy którymi jest stała odległość. Ważnym miejscem na takiej osi jest punkt przypisany do liczby zero. Liczba jeden jest na prawo od zera, a liczba -1 znajduje się po lewej stronie od zera. Łatwo teraz pokazać, porównując dwie liczby, która z nich jest większa, przez pokazanie, że znajduje się bardziej na prawo, a więc w kierunku rosnących wartości. Zbiór liczb całkowitych jest uporządkowany, a oś zmierza w kierunku plus nieskończoności (abstrakcyjna wielkość zapisana symbolem ∞), która jest większa od każdej liczby, którą chcielibyśmy pokazać na osi. Ponieważ oś jest prostą, to drugi jej koniec dąży do minus nieskończoności ($-\infty$). Każda liczba zaznaczona na osi jest większa od $-\infty$.



Dowolny punkt na osi liczbowej reprezentuje liczbę rzeczywistą. Liczba rzeczywista może być liczbą wymierną albo może być liczbą niewymierną. Liczby wymierne definiujemy jako iloraz dwóch liczb całkowitych, z których mianownik musi być różny od zera. W ten sposób możemy zapisać podane poniżej liczby.

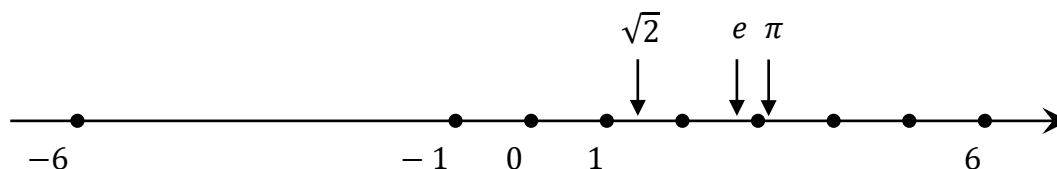
$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{1}{-3} \quad \frac{0}{6} = 0 \quad \frac{1000}{-2} = -500 \quad \frac{3}{1234567890} \quad \frac{13}{7}$$

Jeżeli mianownik liczby wymiernej dzieli bez reszty jej licznik, to taka liczba jest całkowita. Zbiór liczb całkowitych jest podzbiorem właściwym zbioru liczb wymiernych, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ (zbiory te nie są równe, $\mathbf{Z} \neq \mathbf{Q}$). Do zbioru liczb rzeczywistych \mathbf{R} należą również liczby niewymierne. Żadnej liczby niewymiernej nie możemy przedstawić w postaci ilorazu liczb całkowitych, ponieważ zbiory liczb wymiernych i niewymiernych są rozłączne i nie mają żadnego wspólnego elementu, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{IQ} = \emptyset$. Zbiory liczb wymiernych i niewymiernych tworzą razem zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbf{Q} \cup \mathbf{IQ} = \mathbf{R}$. Każda liczba, którą zapisujemy podczas lekcji matematyki z zakresu szkoły średniej jest liczbą rzeczywistą i należy do zbioru liczb wymiernych albo do zbioru liczb niewymiernych ($\mathbf{IQ} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$).

Przykłady liczb niewymiernych:

- $\sqrt{2}$ – długość przekątnej kwadratu o boku 1,
- π – obwód okręgu o średnicy 1,
- e – podstawa logarytmów naturalnych.

Zaznaczmy położenie liczb niewymiernych z przykładu na osi liczbowej. W systemie dziesiętnym, w którym posługujemy się ułamekami dziesiętnymi, czyli liczbami wymiernymi, liczby niewymierne określamy z przybliżeniem. $\sqrt{2} \approx 1,41$, $e \approx 2,72$, $\pi \approx 3,14$



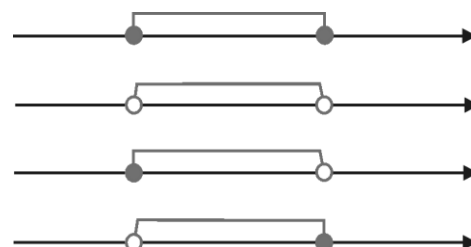
Przedziałem liczbowym nazywamy taki podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, że jeżeli dwie liczby należą do tego podzbioru, to każda liczba leżąca między nimi również do niego należy. Własność tę nazywa się *własnością Darboux*.

Przedziały liczbowe wygodnie jest przedstawiać w postaci graficznej na osi liczbowej. Jeżeli liczba wyznaczająca granicę przedziału należy do niego, oznaczamy ją pełnym znakiem (na zamieszczonych przykładach kółkiem), a przedział taki nazywamy domkniętym. Znakiem otwartym oznaczamy na osi liczbę będącą granicą przedziału otwartego.

Na przedziałach można wykonywać działania: \cup sumy, \cap iloczynu, \setminus różnicy.

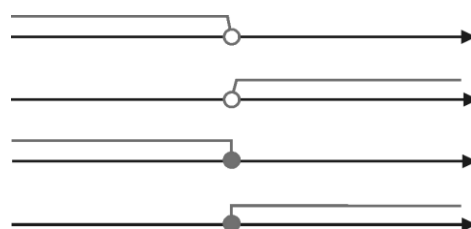
Przedziały liczbowe **ograniczone** (niech $a, b \in \mathbf{R}$ i $a < b$):

- przedział domknięty $(a, b) = \{x \in \mathbf{R}: a \leq x \leq b\}$
- przedział otwarty $(a, b) = \{x \in \mathbf{R}: a < x < b\}$
- przedział lewostronnie domknięty $(a, b) = \{x \in \mathbf{R}: a \leq x < b\}$
- przedział prawostronnie domknięty $(a, b) = \{x \in \mathbf{R}: a < x \leq b\}$



Przedziały liczbowe **nieograniczone** (niech $a \in \mathbf{R}$):

- przedział otwarty $(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R}: x < a\}$
- przedział otwarty $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R}: x > a\}$
- przedział prawostronnie domknięty $(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R}: x \leq a\}$
- przedział lewostronnie domknięty $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R}: x \geq a\}$



Liczby pierwsze, liczby złożone

Liczba pierwsza to liczba naturalna większa od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki:
liczbę 1 i samą siebie.

Liczba naturalna $m \neq 0$ jest *dzielnikiem* liczby naturalnej n wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz $\frac{n}{m}$ jest liczbą naturalną. Zapis $(m|n)$ czytamy: „ m dzieli n ”.

Liczba złożona to każda liczba naturalna większa od 1, która nie jest liczbą pierwszą.

Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki będące liczbami pierwszymi. Istnieje dokładnie jeden taki rozkład. Rozkład na czynniki pierwsze znajduje zastosowanie przy wyznaczaniu najmniejszej wspólnej wielokrotności (oznaczanej skrótem NWW) oraz największego wspólnego dzielnika (NWD).

Cechy podzielności liczb naturalnych:

- jeśli ostatnią cyfrą liczby jest jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8, to liczba jest podzielna przez 2;
- jeśli suma cyfr liczby jest podzielna przez 3, to liczba jest podzielna przez 3;
- jeśli ostatnie dwie cyfry danej liczby tworzą liczbę podzielną przez 4, to dana liczba jest podzielna przez 4;
- jeśli ostatnią cyfrą liczby jest 0 albo 5, to liczba jest podzielna przez 5;
- jeśli suma cyfr liczby parzystej jest podzielna przez 3, to liczba jest podzielna przez 6;
- jeśli suma cyfr liczby jest podzielna przez 9, to liczba jest podzielna przez 9.

Jeśli 2 dzieli liczbę całkowitą n , to liczbę n nazywamy **parzystą**.

Dla każdego całkowitego k , liczba $2k$ jest liczbą parzystą.

Zero jest liczbą całkowitą, parzystą.

Zbiór liczb parzystych $\{2k: k \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$.

Dla każdego całkowitego k , liczba $2k + 1$ jest liczbą nieparzystą.

Zbiór liczb nieparzystych $\{2k + 1: k \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$.

Działania matematyczne na liczbach wymiernych

Dodawanie lub odejmowanie liczb wymiernych zapisanych w postaci ułamków $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ oraz $b \neq 0$ i $d \neq 0$, wymaga sprowadzenia ich do wspólnego mianownika, co najłatwiej można zrobić mnożąc każdą z nich przez mianownik drugiej liczby. Gdy obie liczby mają już taki sam mianownik, to działanie wykonuje się na licznikach.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Mnożenie liczb wymiernych wykonujemy mnożąc ich liczniki przez siebie, a mianowniki przez siebie.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Odwrotnością liczby a (dla $a \neq 0$) jest liczba $\frac{1}{a}$.

Dzielenie przez liczbę wymierną jest równoważne z mnożeniem przez jej odwrotność.

Dla $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Kolejność wykonywania działań matematycznych, zastosowanie nawiasów

Mnożenie liczb całkowitych możemy zapisać jako ich wielokrotne dodawanie, tak jak w przykładzie pokazanym poniżej.

$$5 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$$

Podobny, lecz trudniejszy przykład, w którym występuje liczba ujemna -6 rozwiązujemy:

$$5 \cdot (-6) = (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) = -30$$

możemy też zapisać $-6 = (-1) \cdot 6$ i podobnie jak przykładzie pierwszym dodawać liczbę 6:

$$5 \cdot (-6) = 5 \cdot (-1) \cdot 6 = (-1) \cdot 5 \cdot 6 = -(6 + 6 + 6 + 6 + 6) = -30$$

Mnożenie dwóch liczb ujemnych daje wynik dodatni, tak jak w następującym przykładzie:

$$(-5) \cdot (-6) = 30$$

który możemy przedstawić również tak: $(-5) \cdot (-6) = (-1) \cdot 5 \cdot (-1) \cdot 6 = 1 \cdot 5 \cdot 6 = 30$

gdzie wykorzystujemy przemienność mnożenia i iloczyn $(-1) \cdot (-1) = (-1)(-1) = 1$

Znak mnożenia często jest pomijany w zapisie, gdy występuje on pomiędzy nawiasami lub pomiędzy symbolami reprezentującymi liczby; znaku mnożenia nie możemy jednak pomijać, gdy zapisujemy mnożenie liczb.

Gdy w jednym wyrażeniu spotykamy znak mnożenia (lub dzielenia) oraz dodawania (lub odejmowania), to najpierw wykonujemy mnożenie (dzielenie). Ilustruje to przykład:

$$3 + 5 \cdot 6 = 3 + (6 + 6 + 6 + 6 + 6) = 3 + 30 = 33$$

Wykonując mnożenie $a \cdot (b + c)$ możemy skorzystać z rozdzielności działania dwuargumentowego (mnożenia) względem innego działania dwuargumentowego (dodawania):

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Podobnie zapiszemy rozdzielność mnożenia względem odejmowania:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Jeżeli w nawiasie zapisano sumę więcej niż dwóch wyrażeń, stosujemy tę samą regułę:

$$a \cdot (b + c + d) = a \cdot b + a \cdot (c + d) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d$$

Podobnie, wykorzystując przemienność mnożenia, możemy zapisać:

$$(b + c + d) \cdot a = b \cdot a + (c + d) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a + d \cdot a$$

Rozdzielność dzielenia względem dodawania (lub odejmowania) prościej jest pokazać używając zapisu ułamkowego, niż z wykorzystaniem nawiasów ($c \neq 0$):

$$(a + b) \div c = \frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Należy jednak pamiętać, że rozdzielność dodawania dotyczy licznika ułamka!

Chcąc obliczyć wyrażenie (w którym mianownik $b + c \neq 0$)

$$\frac{a}{b + c}$$

nie możemy zapisać go jako sumy ilorazów $\frac{a}{b}$ i $\frac{a}{c}$, gdyż $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{ac+ab}{bc}$.

Przedstawione podstawy posługiwania się działaniami matematycznymi pozwoli nam teraz przejść do zestawu prostych zadań, których rozwiązanie utrwali wiedzę. Zadania maturalne o dużym stopniu skomplikowania składają się z wielu etapów, a w każdym kolejnym kroku wykonujemy podstawowe działania, które muszą być prawidłowo zapisane (jest to oceniane!) i poprawnie rozwiązane.