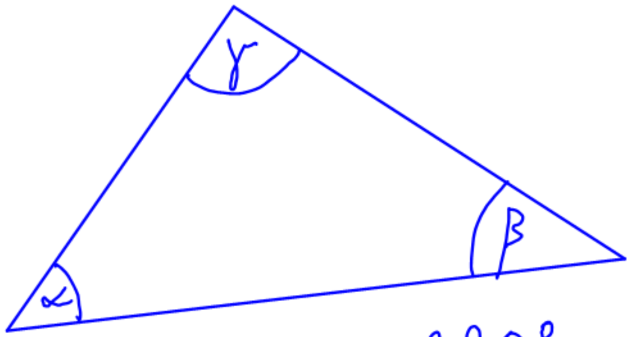
Matematyka poziom spokojny

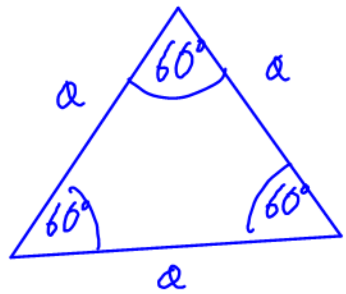
5. Planimetria TEORIA

Trójkąt

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°.

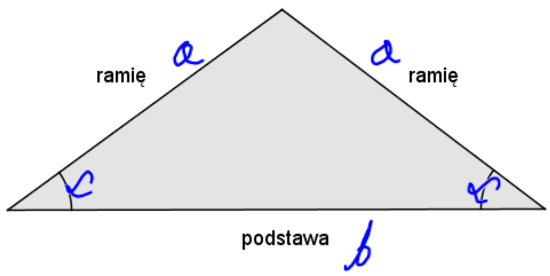


$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

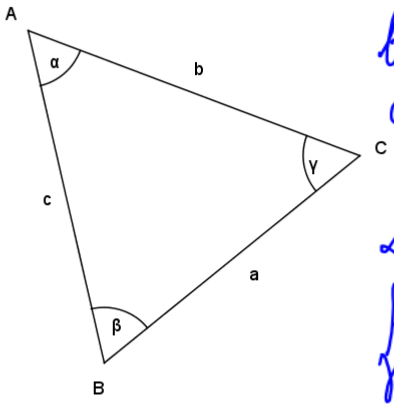


W trójkącie równobocznym wszystkie boki są tej samej długości oraz wszystkie kąty są równe.

W trójkącie równoramiennym dwa boki są tej samej długości, a kąty przy podstawie są równe

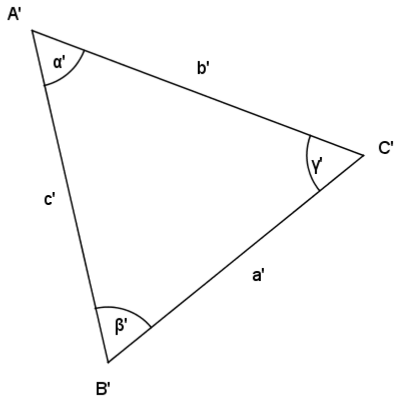


Trójkąty są przystające, jeżeli ich odpowiednie boki są równe i ich odpowiednie kąty są równe.



$a = a'$
$b = b'$
$c = c'$

$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$
$\gamma = \gamma'$

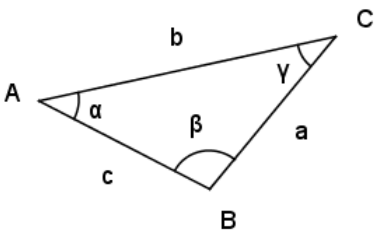


$\Delta\, ABC \equiv \Delta\, A'B'C'$

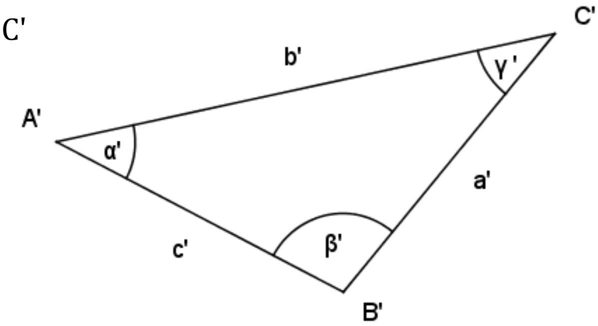
$\equiv$

Dwa trójkąty są **podobne**,

jeśli ich odpowiednie kąty są równe, a odpowiednie boki są proporcjonalne.



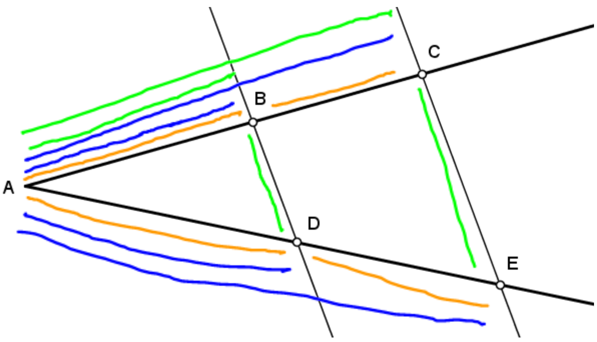
$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$



- Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne. Stosunek długości odpowiednich boków trójkątów podobnych nazywamy skalą podobieństwa $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k\right)$. ← SKALA PODOB.
- Jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne (wystarczy sprawdzić równość dwóch par kątów; suma miar kątów w trójkącie to 180°).
- Jeśli dwa boki jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami w obu trójkątach są odpowiednio równe, to trójkąty te są podobne.

Twierdzenie Talesa. Jeżeli ramiona kąta przecięte zostały dwiema prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu.

- $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}$
- $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|}$
- $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|}$

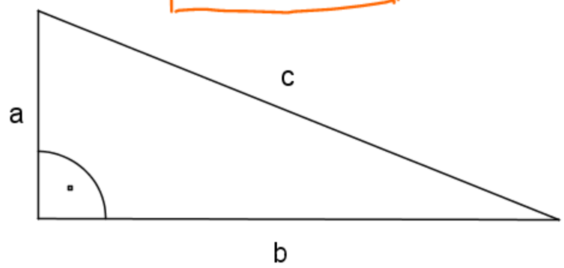


Twierdzenie Pitagorasa.

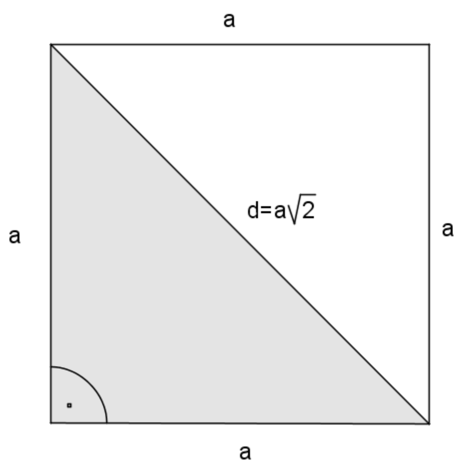
- W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

- Jeśli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to ten trójkąt jest prostokątny.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Długość przekątnej kwadratu o boku a wynosi $a\sqrt{2}$.
Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta będącego połową kwadratu.



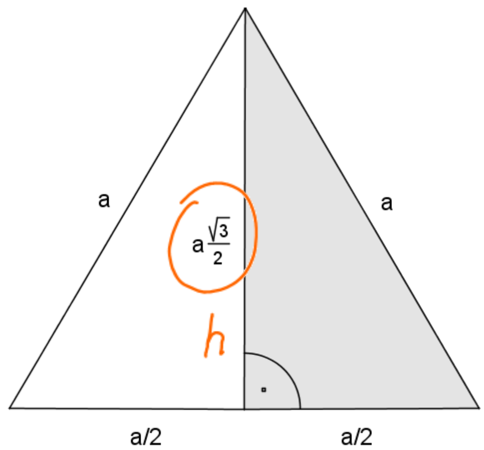
$$a^2 + a^2 = d^2$$

$$2a^2 = d^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$$d = \sqrt{2a^2}$$

$$\boxed{d = \sqrt{2}\, a}$$

Wysokość trójkąta równobocznego o boku a wynosi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego będącego połową trójkąta równobocznego.



$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2 \quad / -\frac{a^2}{4}$$

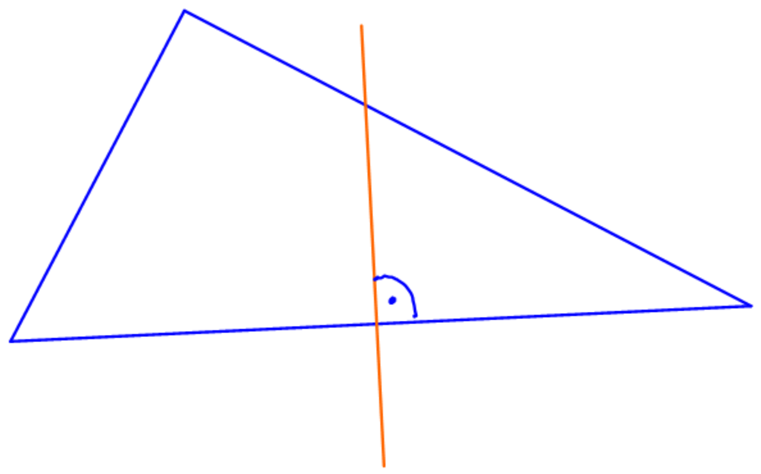
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad / \sqrt{\ }$$

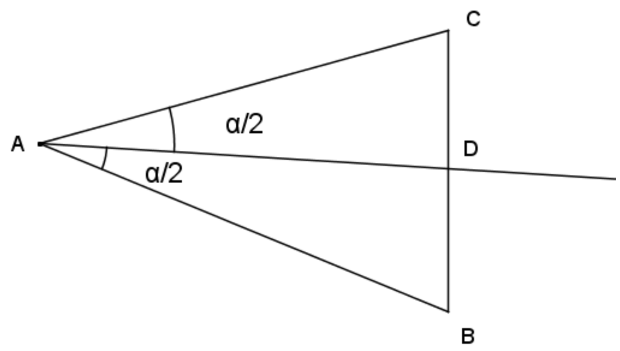
$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\boxed{h_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

Symetralną boku jest prosta prostopadła do boku trójkąta i przechodząca przez jego środek



Dwusieczną kąta wewnętrznego trójkąta jest półprosta o początku w wierzchołku tego kąta, dzieląca go na dwa kąty przystające (dwusieczną jest półprosta AD na rysunku poniżej).

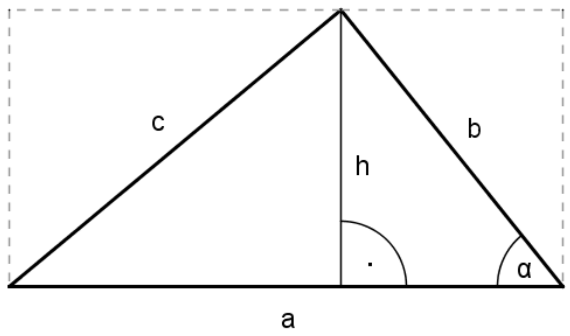


Dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok trójkąta na odcinki, których stosunek długości jest równy stosunkowi długości odpowiednich pozostałych boków trójkąta (np. proporcja długości odcinków na rysunku pokazanym powyżej: $\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$).

Pola powierzchni figur.

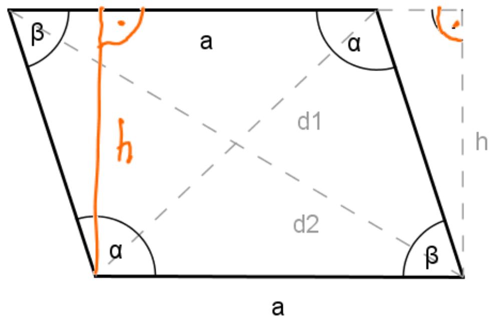
Pole powierzchni trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$$



Pole powierzchni równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = a \cdot h$$

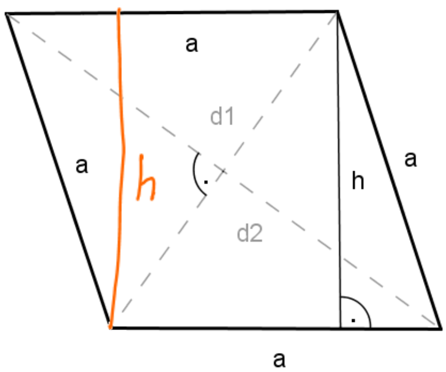


Równoległobok mający wszystkie boki równej długości nazywamy rombem.

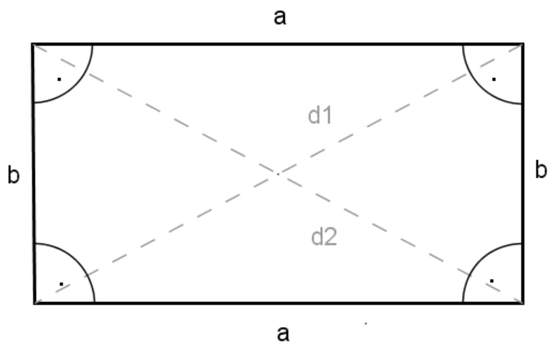
Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.

Pole powierzchni rombu o przekątnych długości d_1 i d_2 wyraża się poniższym wzorem.

$$P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 = a \cdot h$$

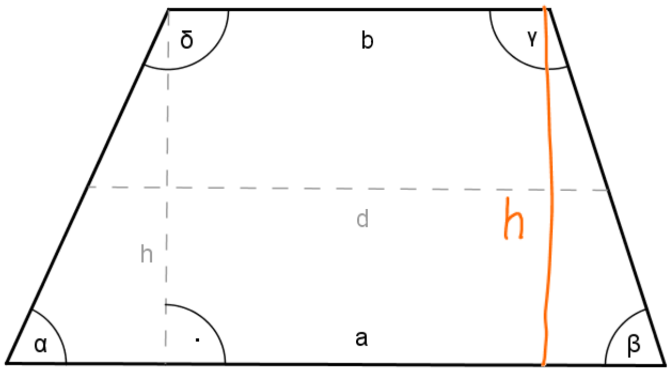


Pole powierzchni prostokąta wyraża się wzorem: $P = a \cdot b$.



Pole powierzchni trapezu o podstawach długości a i b i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a+b}{2}h$$

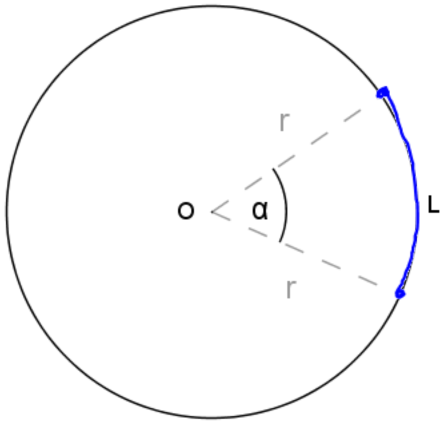


$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

dla każdego 4-boku.

$\boxed{\pi = 3,14\ldots}$

Okręgiem o środku w punkcie O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O wynosi r.

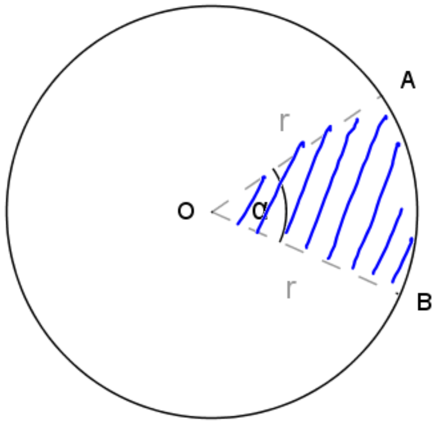


Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem

$$\boxed{L = 2\pi r}$$

Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy (jego wierzchołkiem jest środek okręgu) o mierze α, wyraża się poniższym wzorem.

$$\boxed{L = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r}$$

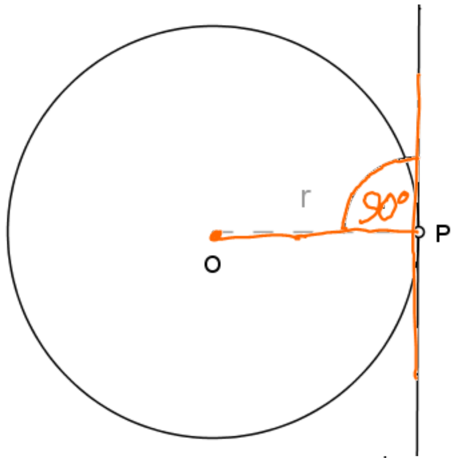


Pole powierzchni koła o promieniu r wyraża się wzorem

$$\boxed{P = \pi r^2}$$

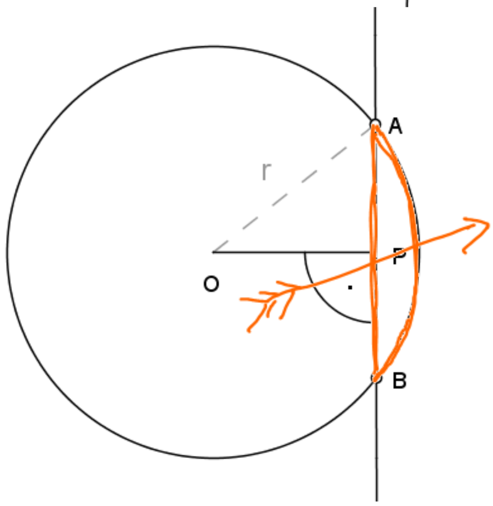
Pole powierzchni wycinka koła wyznaczonego przez kąt AOB (o mierze α) wyraża się poniższym wzorem.

$$\boxed{P = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2}$$



Styczną do okręgu nazywamy prostą, która ma tylko jeden punkt (punkt styczności) wspólny z okręgiem. Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do stycznej.

$$|OP| = r$$



Sieczną okręgu nazywamy prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne.

$$|OP| < r$$

Odcinek AB nazywamy cięciwą okręgu.

Okrąg i koło w układzie współrzędnych kartezjańskich.

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i o promieniu r jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny (x, y), które spełniają poniższe równanie.

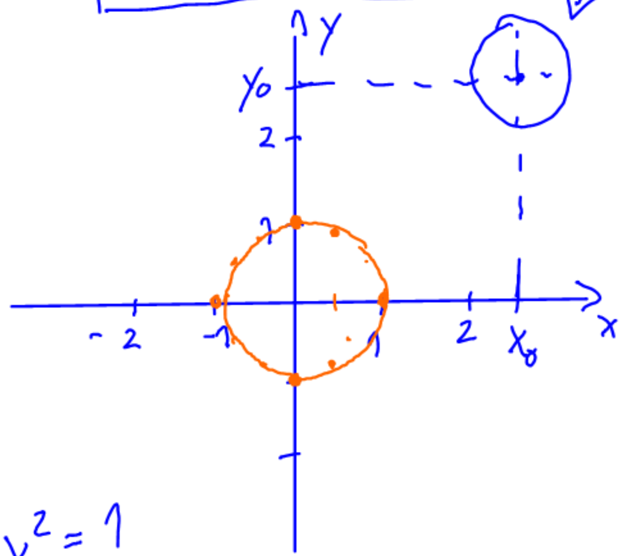
$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Okrąg o środku w punkcie $O = (x_O, y_O)$ i o promieniu r jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny (x, y), które spełniają poniższe równanie.

$$\boxed{(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

$r = 1$



$\boxed{x = 0} \Rightarrow y^2 = 1$

$\boxed{y = 1}$ lub $\boxed{y = -1}$

$\boxed{y = 0} \Rightarrow x^2 = 1$

$\boxed{x = 1}$ lub $\boxed{x = -1}$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

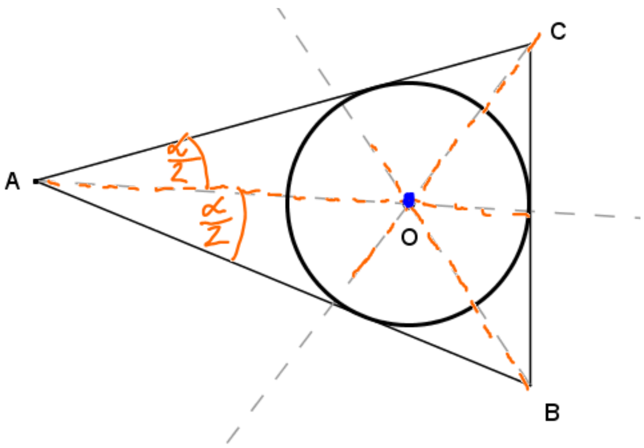
$\frac{1}{4} + y^2 = 1 \quad / -\frac{1}{4}$

$y^2 = \frac{3}{4} \quad / \sqrt{\ }$

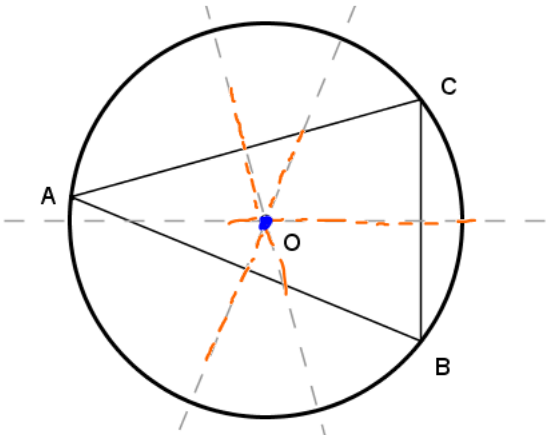
$\boxed{y = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0{,}86$ $\boxed{y = \frac{-\sqrt{3}}{2}}$

Okrąg wpisany w trójkąt i okrąg opisany na trójkącie.

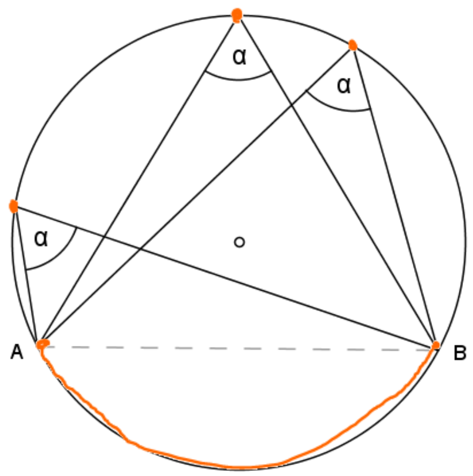
Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Okrąg jest wpisany w trójkąt, jeśli jest styczny do wszystkich boków tego trójkąta.

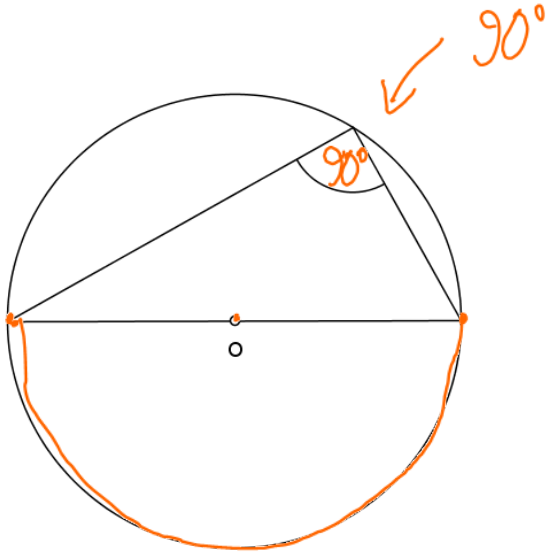


Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Kąt wpisany w okrąg to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramionami są półproste zawierające cięciwy tego okręgu.





- Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku są równe.
- Kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (średnicy) jest kątem prostym.

Kąt środkowy w okręgu to kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu. Kąt środkowy w okręgu jest dwukrotnie większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.