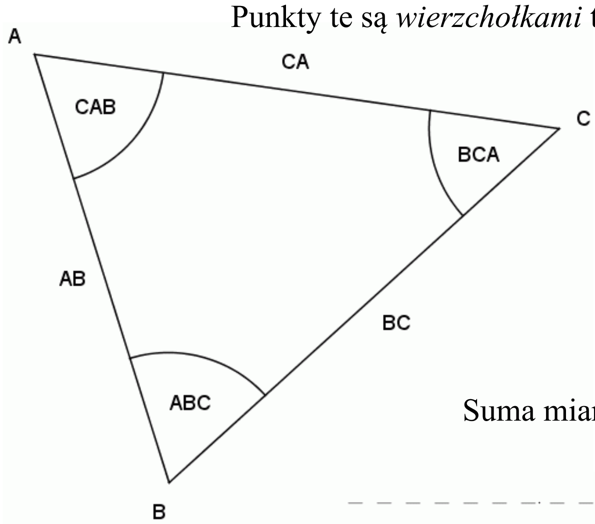
www.matpanda.pl

Matematyka poziom spokojny

5. Planimetria TEORIA

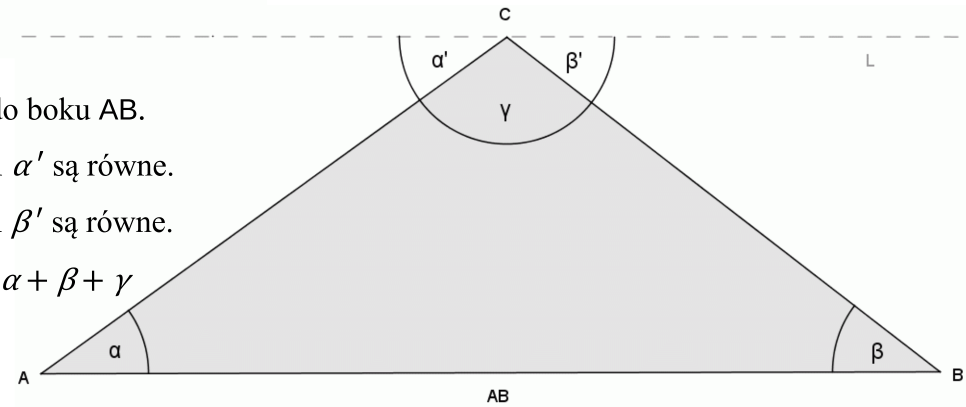
Trójkąt jest figurą wyznaczoną przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Punkty te są *wierzchołkami* trójkąta, a odcinki je łączące są *bokami* trójkąta.



W trójkącie ABC mamy:

- wierzchołki: A, B, C;
- boki: AB, BC, CA;
- kąty: ∢ CAB, ∢ ABC, ∢ BCA.

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°.



Prosta L jest równoległa do boku AB.

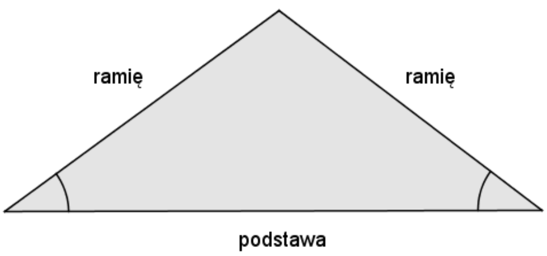
Naprzemianległe kąty α i α' są równe.

Naprzemianległe kąty β i β' są równe.

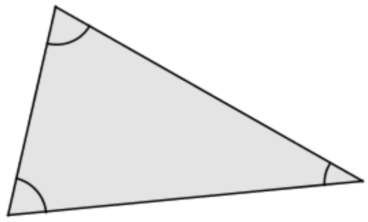
$$\alpha' + \beta' + \gamma = 180° = \alpha + \beta + \gamma$$

W trójkącie *równobocznym* wszystkie boki są tej samej długości oraz wszystkie kąty są równe.

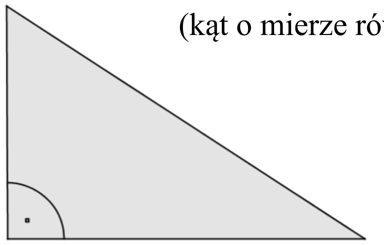
W trójkącie *równoramiennym* dwa boki są tej samej długości, a kąty przy podstawie są równe.



Trójkąt *ostrokątny* ma wszystkie kąty ostre (kąty o mierze mniejszej od 90°).

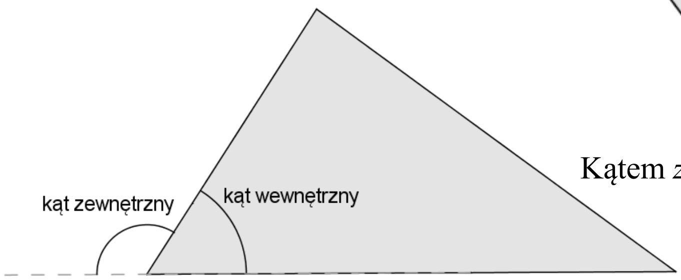


Trójkąt *prostokątny* ma jeden kąt prosty (kąt o mierze równej 90°).

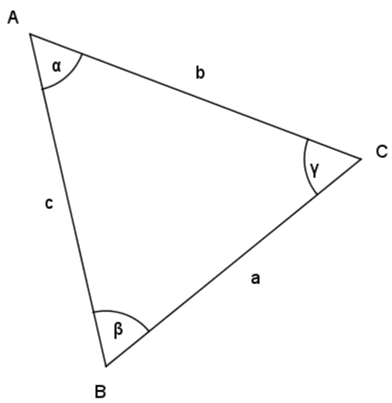


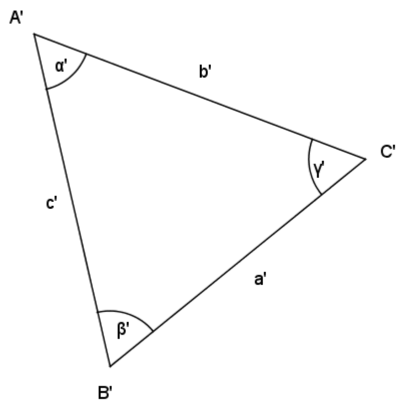
Trójkąt *rozwartokątny* ma jeden kąt rozwarty (kąt o mierze większej od 90° i mniejszej od 180°).

Kątem *zewnętrznym* trójkąta nazywamy kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta.



Trójkąty są ***przystające***,
jeżeli ich odpowiednie boki są równe i ich odpowiednie kąty są równe.





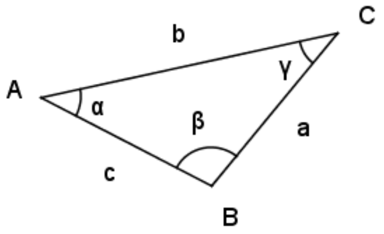
$\Delta\ ABC \equiv \Delta\ A'B'C'$

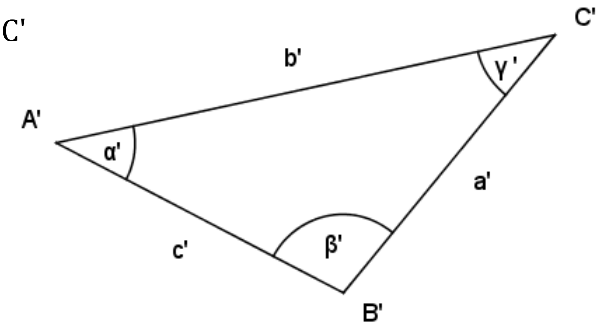
- Cecha BBB (bok-bok-bok). Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.
- Cecha BKB (bok-kąt-bok). Jeśli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi zawartemu między nimi w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.
- Cecha KBK (kąt-bok-kąt). Jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Dwa trójkąty są ***podobne***,

jeśli ich odpowiednie kąty są równe, a odpowiednie boki są proporcjonalne.

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$





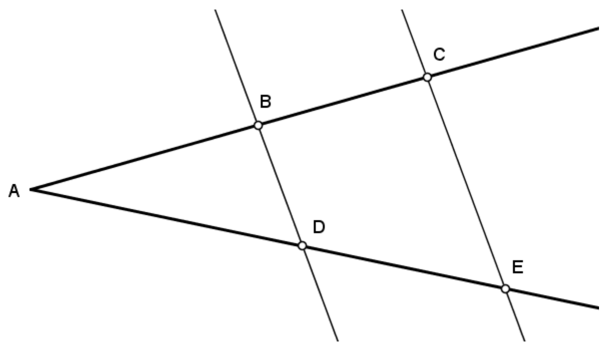
- Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne. Stosunek długości odpowiednich boków trójkątów podobnych nazywamy *skalą podobieństwa* $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k\right)$.
- Jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne (wystarczy sprawdzić równość dwóch par kątów; suma miar kątów w trójkącie to 180°).
- Jeśli dwa boki jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami w obu trójkątach są odpowiednio równe, to trójkąty te są podobne.

Twierdzenie Talesa. Jeżeli ramiona kąta przecięte zostały dwiema prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu.

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|}$$

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|}$$



trójkąty podobne: $\Delta\, ADB \sim \Delta\, AEC$

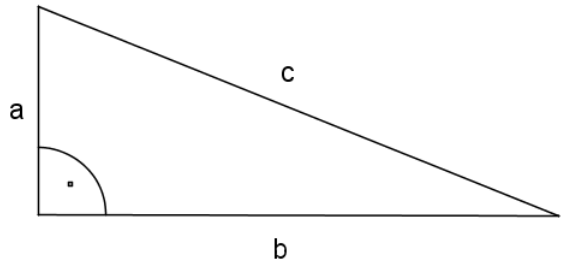
Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe. Na przykład: $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|} \Rightarrow BD \parallel CE$.

Nierówność trójkąta. Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt tylko wtedy, gdy $a + b > c$, gdzie c jest długością najdłuższego odcinka.

Twierdzenie Pitagorasa.

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

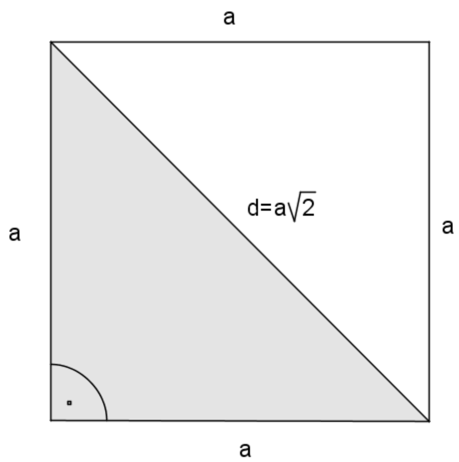
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Jeśli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to ten trójkąt jest prostokątny.

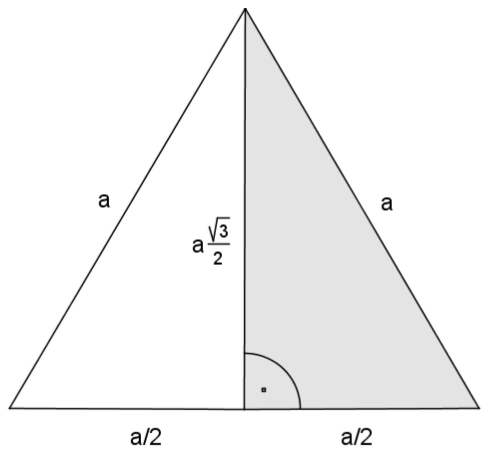
Długość przekątnej kwadratu o boku a wynosi $a\sqrt{2}$.
Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta będącego połową kwadratu.

$$a^2 + a^2 = d^2$$
$$d^2 = 2a^2$$
$$d = a\sqrt{2}$$

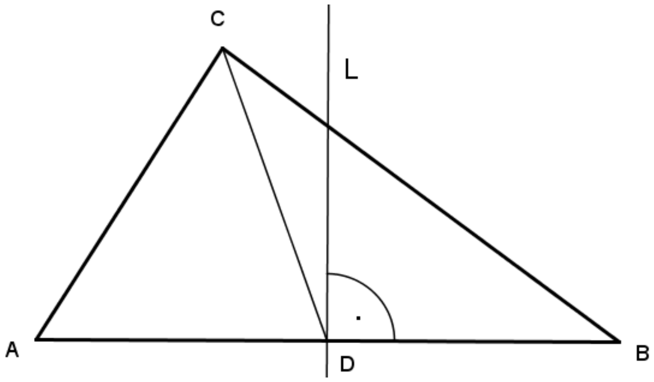


Wysokość trójkąta równobocznego o boku a wynosi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego będącego połową trójkąta równobocznego.

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$
$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$$
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



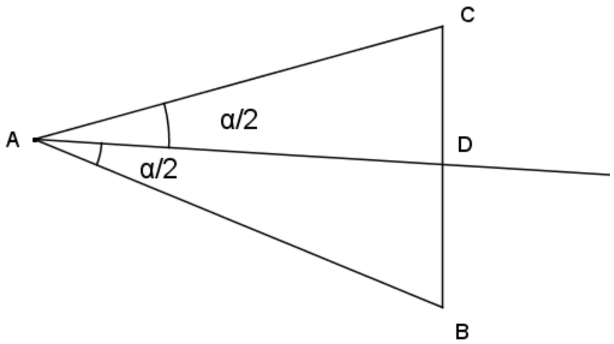
Środkowa jest odcinkiem łączącym wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku (środkową jest odcinek CD na rysunku poniżej).



W dowolnym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, zwanym środkiem ciężkości trójkąta. Punkt ten dzieli każdą środkową w stosunku 2:1.

Symetralną boku jest prosta prostopadła do boku trójkąta i przechodząca przez jego środek (symetralną jest prosta L na rysunku powyżej).

Dwusieczną kąta wewnętrznego trójkąta jest półprosta o początku w wierzchołku tego kąta, dzieląca go na dwa kąty przystające (dwusieczną jest półprosta AD na rysunku poniżej).

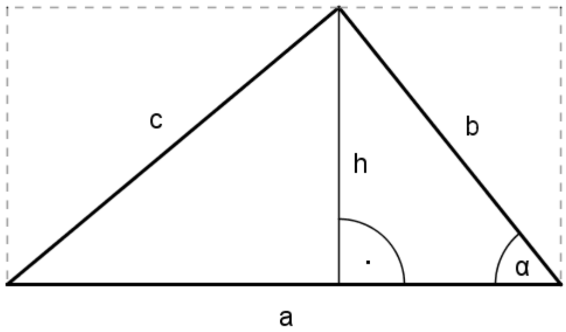


Dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok trójkąta na odcinki, których stosunek długości jest równy stosunkowi długości odpowiednich pozostałych boków trójkąta (np. proporcja długości odcinków na rysunku pokazanym powyżej: $\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$).

Pola powierzchni figur.

Pole powierzchni trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

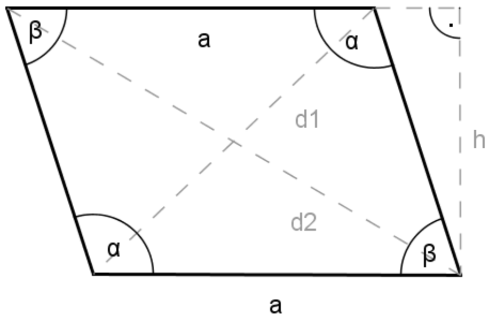
$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$$



Znając długości boków trójkąta a, b, c, można obliczyć jego pole powierzchni wykorzystując wzór Herona: $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$.

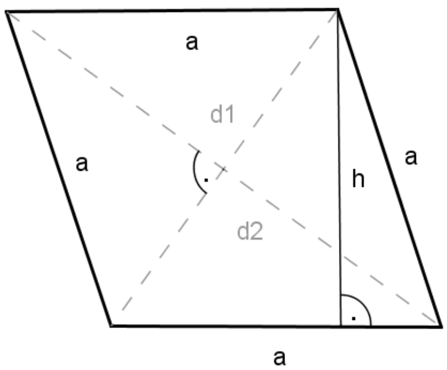
Czworokąt mający dwie pary boków równoległych nazywamy *równoległobokiem*.
Przeciwległe boki równoległoboku są równe i równoległe.
Przeciwległe kąty równoległoboku są równe. Przekątne dzielą się na połowy.
Suma kątów wewnętrznych równoległoboku przy jednym boku jest równa 180°.
Pole powierzchni równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = a \cdot h$$

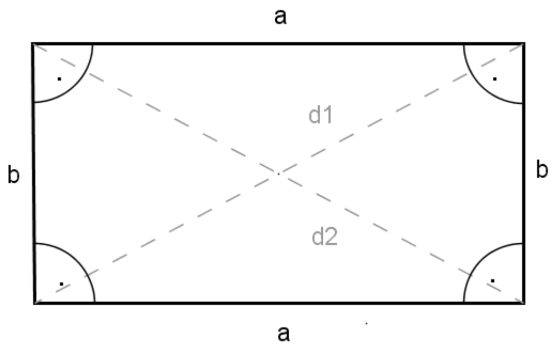


Równoległobok mający wszystkie boki równej długości nazywamy *rombem*.
Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.
Pole powierzchni rombu o przekątnych długości d_1 i d_2 wyraża się poniższym wzorem.

$$P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 = a \cdot h$$



Czworokąt mający wszystkie kąty proste, a przeciwległe boki równe i równoległe nazywamy *prostokątem*. Przekątne prostokąta są równej długości, a punkt przecięcia dzieli je na połowy. Prostokąt mający wszystkie boki równe nazywamy *kwadratem*. Przekątne kwadratu są do siebie prostopadłe. Pole powierzchni prostokąta wyraża się wzorem: $P = a \cdot b$.



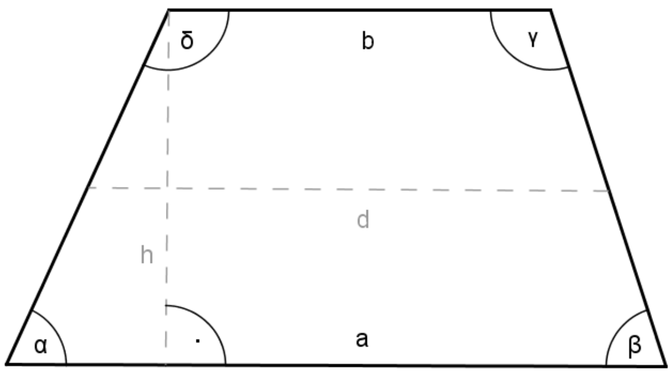
Czworokąt mający jedną parę boków równoległych nazywamy *trapezem*.

Odcinek łączący środki ramion trapezu (d na rysunku poniżej) jest równoległy do podstaw, a jego długość jest równa połowie sumy długości podstaw $\left(d = \frac{a+b}{2}\right)$.

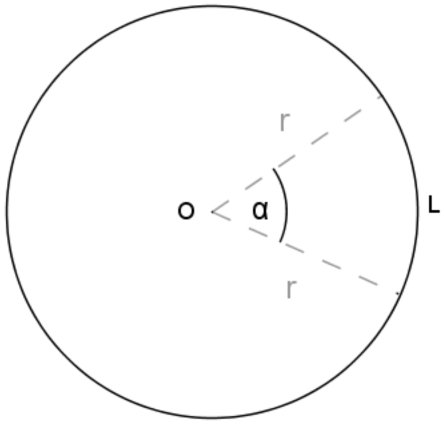
Suma kątów przyległych do ramienia jest równa: $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$.

Pole powierzchni trapezu o podstawach długości a i b i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a + b}{2} h$$



Okręgiem o środku w punkcie O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O wynosi r.

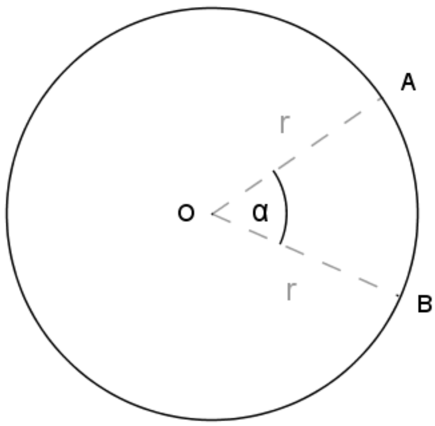


Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem

$$L = 2\pi r$$

Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez *kąt środkowy* (jego wierzchołkiem jest środek okręgu) o mierze α, wyraża się poniższym wzorem.

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r$$

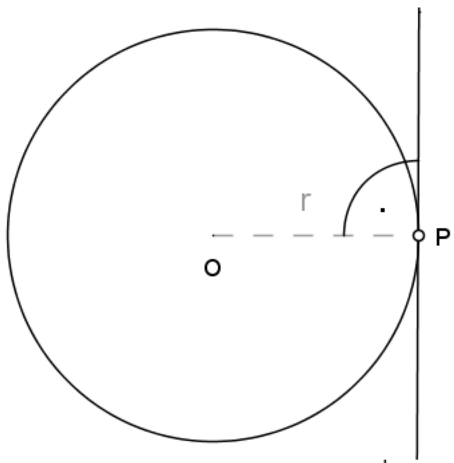


Pole powierzchni koła o promieniu r wyraża się wzorem

$$P = \pi r^2$$

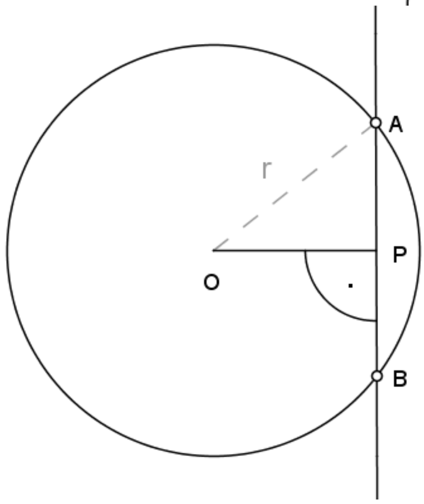
Pole powierzchni wycinka koła wyznaczonego przez kąt AOB (o mierze α) wyraża się poniższym wzorem.

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2$$



Styczną do okręgu nazywamy prostą, która ma tylko jeden punkt (*punkt styczności*) wspólny z okręgiem. Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do stycznej.

$$|OP| = r$$



Sieczną okręgu nazywamy prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne.

$$|OP| < r$$

Odcinek AB nazywamy *cięciwą okręgu*.

Okrąg i koło w układzie współrzędnych kartezjańskich.

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i o promieniu r jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny (x, y), które spełniają poniższe równanie.

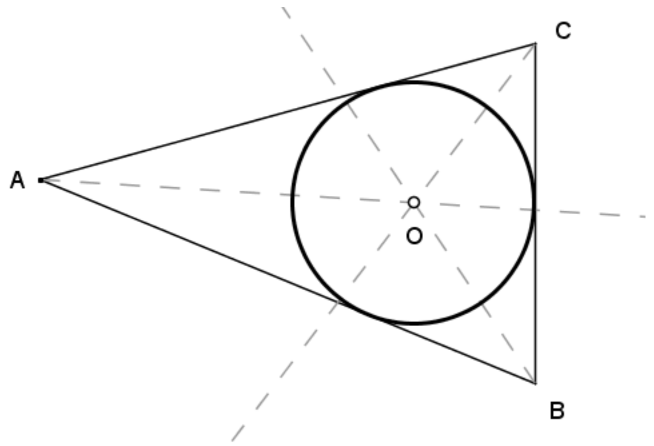
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Okrąg o środku w punkcie $O = (x_O, y_O)$ i o promieniu r jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny (x, y), które spełniają poniższe równanie.

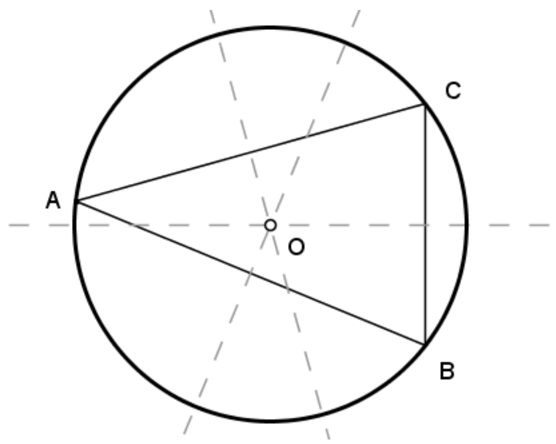
$$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2$$

Okrąg wpisany w trójkąt i okrąg opisany na trójkącie.

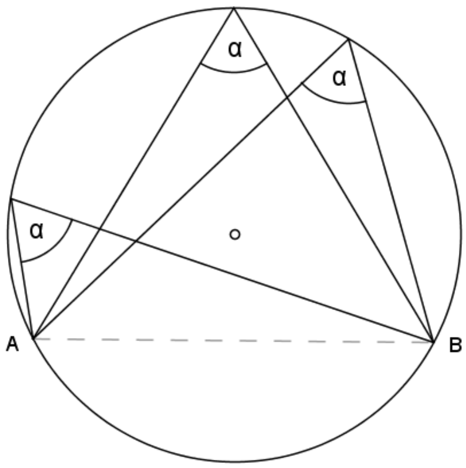
Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Okrąg jest wpisany w trójkąt, jeśli jest styczny do wszystkich boków tego trójkąta.

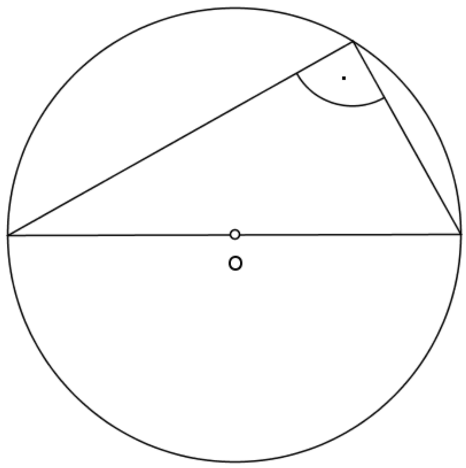


Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Kąt wpisany w okrąg to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramionami są półproste zawierające cięciwy tego okręgu.





- Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku są równe.
- Kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (średnicy) jest kątem prostym.

Kąt środkowy w okręgu to kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu. Kąt środkowy w okręgu jest dwukrotnie większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.