Matematyka
poziom spokojny

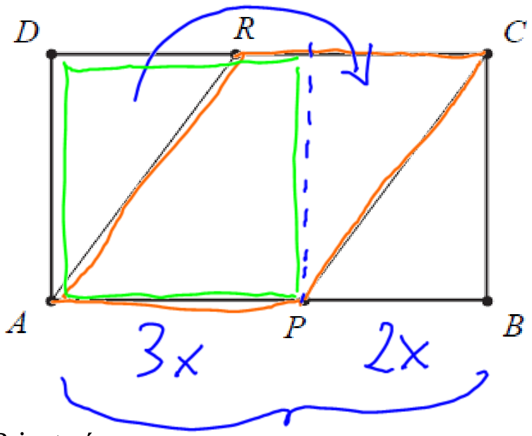
5. Planimetria
ZADANIA

ZADANIA ZAMKNIĘTE

5.1. (1 punkt)

Pole prostokąta $ABCD$ jest równe 90.

Na bokach AB i CD wybrano – odpowiednio – punkty P i R, takie, że $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|CR|}{|RD|} = \frac{3}{2}$.



Pole czworokąta $APCR$ jest równe

a) 36 b) 40 c) 54 d) 60

$P_{\square} = \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \cancel{90}^{18} = 54$

5.2. C (1 punkt)

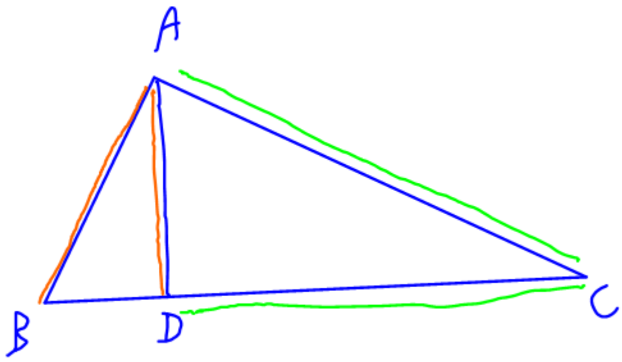
Trójkąt ABC jest prostokątny. Odcinek AD jest wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A na przeciwprostokątną BC. Wtedy

a) $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|}$ b) $\cancel{\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AD|}}$ c) $\cancel{\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|AB|}}$ d) $\cancel{\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|BD|}}$

NA ZDROWY ROZUM !

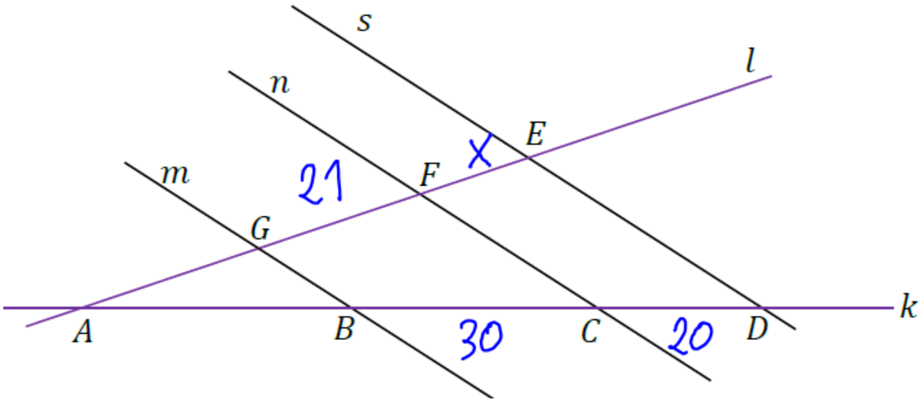
$\frac{AD}{AB} = ?$

$\boxed{\frac{AD}{AB} \approx \frac{3}{4}}$



5.3. (1 punkt)

Proste k i l przecinają się w punkcie A. Proste m, n i s są do siebie równoległe i przecinają obie proste k i l w punktach B, C, D, E, F, G (zobacz rysunek poniżej), w taki sposób, że: $|BC| = 30$, $|CD| = 20$, $|GF| = 21$.



Długość odcinka FE jest równa

a) 10 b) 11 c) 12 d) 14

$$\frac{30}{21} = \frac{20}{x}$$

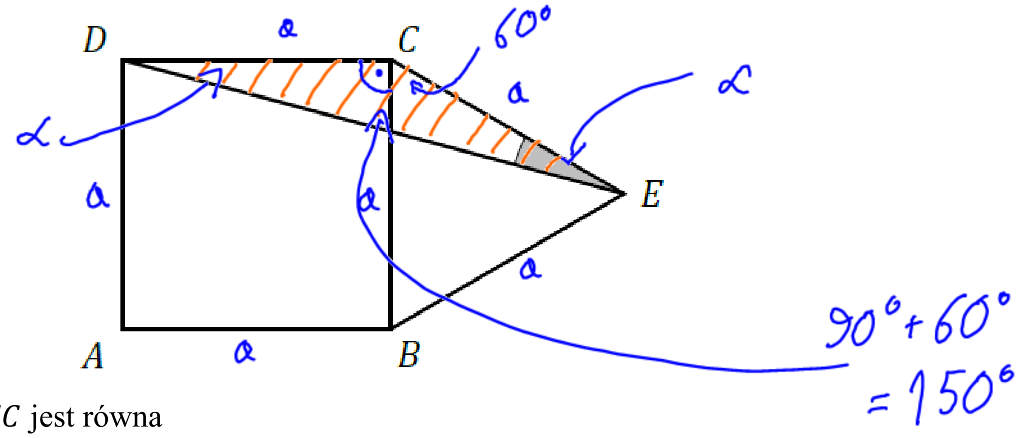
$$21 \cdot 20 = 30x \quad /:30$$

$$\frac{{}^{7}\cancel{21} \cdot 2\cancel{0}}{\cancel{3}\cancel{0}} = x$$

$$x = 2 \cdot 7 = \boxed{14}$$

5.4. (1 punkt)

Na boku BC kwadratu $ABCD$ (na zewnątrz) zbudowano trójkąt równoboczny BEC.



Miara kąta DEC jest równa

a) 10°   b) 20°   c) 15°   d) 30°

$180° = 150° + \alpha + \alpha \; / -150°$

$30° = 2\alpha \; / :2$

$\alpha = 15°$

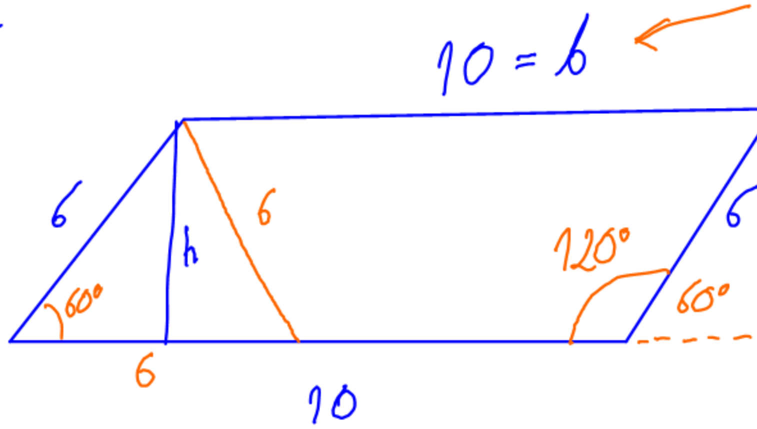
5.5. (1 punkt)

Boki równoległoboku mają długości 6 i 10, a kąt rozwarty między tymi bokami ma miarę 120°. Pole tego równoległoboku jest równe

a) $30\sqrt{3}$ b) 30 c) $60\sqrt{3}$ d) 60

Strona 15 tablic

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



$$P_{\square} = b \cdot h$$

$$P = 10 \cdot h = 10 \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cancel{6}^{3} = 30\sqrt{3}$$

5.6. (1 punkt)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest okrąg $\mathcal{O}$ określony równaniem: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–G.

1. Środek S okręgu $\mathcal{O}$ ma współrzędne:

A. $S = (2, -3)$
B. $S = (-2, -3)$
C. $S = (-2, 3)$
D. $S = (2, 3)$

2. Promień r okręgu $\mathcal{O}$ jest równy:

E. $r = 16$
F. $r = 4$
G. $r = 5$

Wskazówka. Tablice - geometria analityczna - równanie okręgu (około strony 20)

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ $\quad S(a, b)$

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

$a = 2$
$b = -3$ $\Rightarrow$ $S(2, -3)$

$r^2 = 16$

$r = 4$

5.7. (1 punkt)

Współrzędne x punktów przecięcia okręgu O określonego równaniem

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

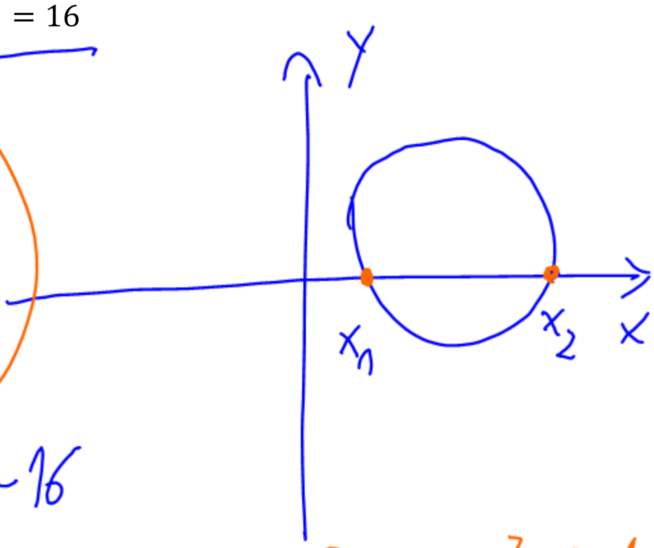
z osią $0x$ wynoszą:

a) $x_1 = 2 - \sqrt{7},\ x_2 = 2 + \sqrt{7}$

b) $x_1 = 3 - \sqrt{7},\ x_2 = 3 + \sqrt{7}$

c) $x_1 = 2 - 2\sqrt{3},\ x_2 = 2 + 2\sqrt{3}$

d) $x_1 = 3 - 2\sqrt{3},\ x_2 = 3 + 2\sqrt{3}$



$y = 0$

$(x-2)^2 + 3^2 = 16 \quad / -16$

$x^2 + 4 - 4x + 9 - 16 = 0$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$x^2 - 4x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 + 12 = 28$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$

$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7}$

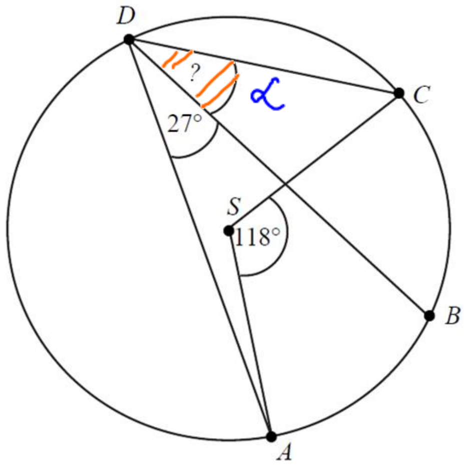
$x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = \frac{4}{2} + \frac{2}{2}\sqrt{7} =$

$x_2 = 2 + \sqrt{7}$

5.8. (1 punkt)

Punkty $ABCD$ leżą na okręgu o środku S.

Miara kąta BDC jest równa



a) 91°

b) 72,5°

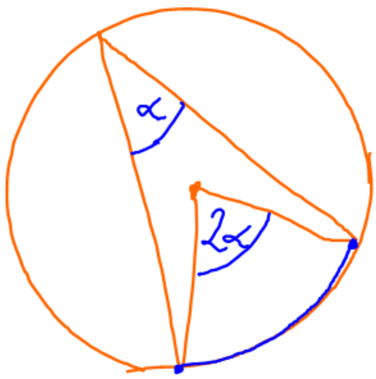
c) 18°

d) 32°

$$\alpha + 27 = \frac{118}{2}$$

$$\alpha + 27 = 59 \quad \Big| -27$$

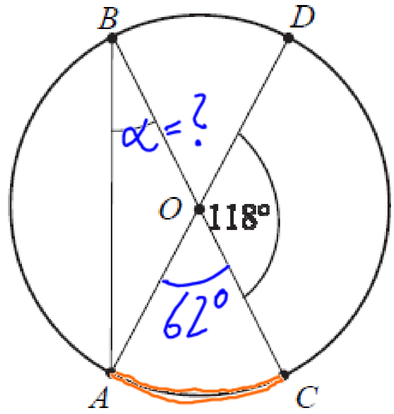
$$\boxed{\alpha = 59 - 27 = 32}$$



5.9. (1 punkt)

Punkty A, B, C, D leżą na okręgu o środku w punkcie O.

Kąt środkowy DOC ma miarę $118°$.



$180° - 118° = 62°$

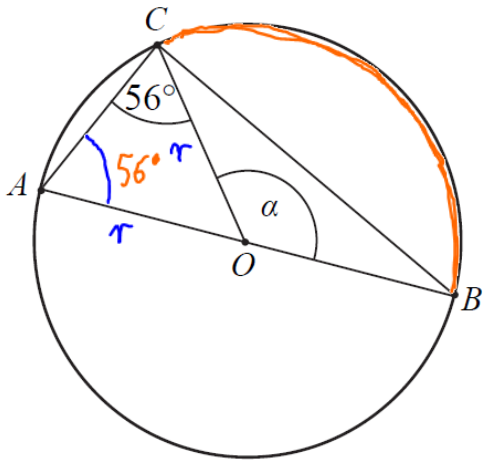
$\alpha = \frac{62°}{2} = 31°$

Miara kąta ABC jest równa:

a) $59°$ b) $48°$ c) $62°$ d) $31°$

5.10. (1 punkt)

Na okręgu o środku w punkcie O leży punkt C (zobacz rysunek). Odcinek AB jest średnicą tego okręgu.



$56° \cdot 2 = 112°$

Zaznaczony na rysunku kąt środkowy α ma miarę:

a) $116°$ b) $114°$ c) $112°$ d) $110°$

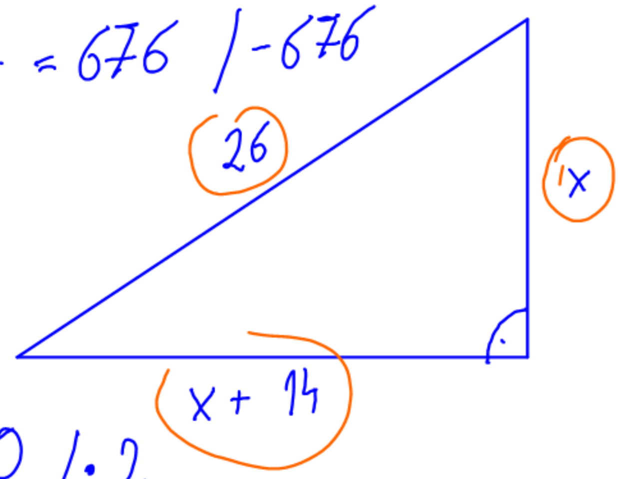
ZADANIA OTWARTE

5.11. (2 punkty)

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 26 cm, a jedna z przyprostokątnych jest o 14 cm dłuższa od drugiej. Oblicz obwód tego trójkąta.

$$(x+14)^2 + x^2 = 26^2$$

$$x^2 + 28x + 196 + x^2 = 676 \quad / -676$$



$$2x^2 + 28x - 480 = 0 \quad /:2$$

$$x^2 + 14x - 240 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 196 - 4\cdot 1(-240) = 196 + 960 = 1156$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1156} = 34$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-14-34}{2\cdot 1} = \frac{-48}{2} = \cancel{-24}$$

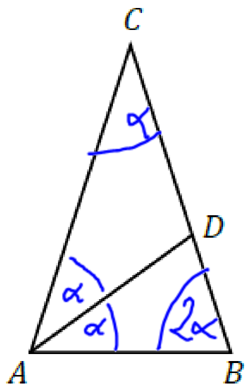
$$x_2 = \frac{-14+34}{2\cdot 1} = \frac{20}{2} = \boxed{10 = x}$$

$$Obw = x + x + 14 + 26 = 2x + 40 = 2\cdot 10 + 40 = 60$$

Odp. Obwód wynosi 60 cm.

5.12. (2 punkty)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w takim punkcie D, że trójkąty ABC i BDA są podobne.



Oblicz miarę kąta BAC.

$\beta = 2\alpha = ?$

$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$

$5\alpha = 180^\circ \quad / : 5$

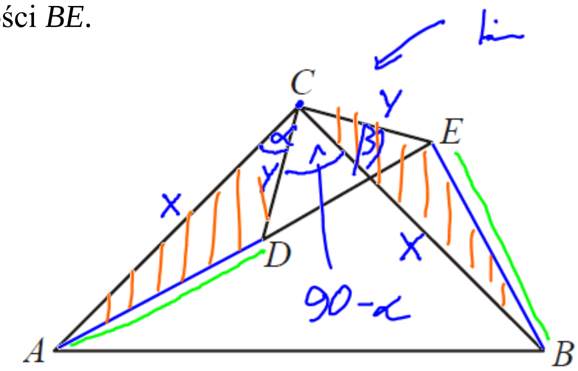
$\alpha = 36^\circ$

$\beta = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$

Odp. Kąt BAC jest równy 72°.

5.13. (2 punkty)

Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że długość AD jest równa długości BE.



- Udowadniam że ADC i BEC są przystające.
- Trójkąty te mają dwa identyczne boki x i y.
- $90^\circ = \beta + 90^\circ - \alpha \quad / -90^\circ$

($\sphericalangle ECD$)

$$\Downarrow$$

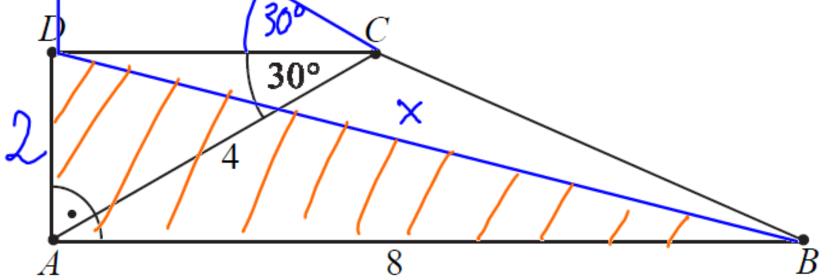
$$0 = \beta - \alpha$$

$$\alpha = \beta$$

- ADC i BEC są więc przystające czyli $AD = BE$.

5.14. (2 punkty)

W trapezie prostokątnym $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość 8. Przekątna AC tego trapezu ma długość 4 i tworzy z krótszą podstawą trapezu kąt o mierze 30° (zobacz rysunek). Oblicz długość przekątnej BD tego trapezu.



$$2^2 + 8^2 = x^2$$

$$x^2 = 4 + 64$$

$$x^2 = 68 \quad / \sqrt{\ }$$

$$x = \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = 2\sqrt{17}$$

$$68 = 2 \cdot 34 = 2 \cdot 2 \cdot 17 = 4 \cdot 17$$

Odp. Długość przekątnej BD wynosi $2\sqrt{17}$.

5.15. (2 punkty)

Trójkąt równoboczny ABC ma pole równe $9\sqrt{3}$. Prosta równoległa do boku BC przecina boki AB i AC – odpowiednio – w punktach K i L. Trójkąty ABC i AKL są podobne, a stosunek długości boków tych trójkątów jest równy $\frac{3}{2}$.

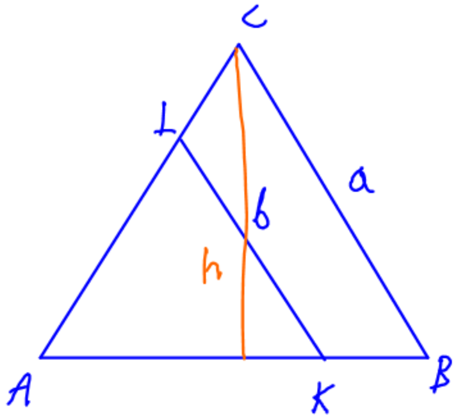
Oblicz długość boku trójkąta AKL.

$P = 9\sqrt{3}$

$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$

$b = ?$

strona 15 TABLIC



$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$P = \frac{1}{2}ah$

$9\sqrt{3} = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$9\cancel{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{4}a^2 \quad /:\sqrt{3}$

$9 = \frac{a^2}{4} \quad /\sqrt{\ }$

$3 = \frac{a}{2} \quad /\cdot 2$

$\boxed{a = 6}$

$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$

$\frac{6}{b} = \frac{3}{2}$

$3b = 2\cdot 6$

$3b = 12 \quad /:3$

$\boxed{b = 4}$

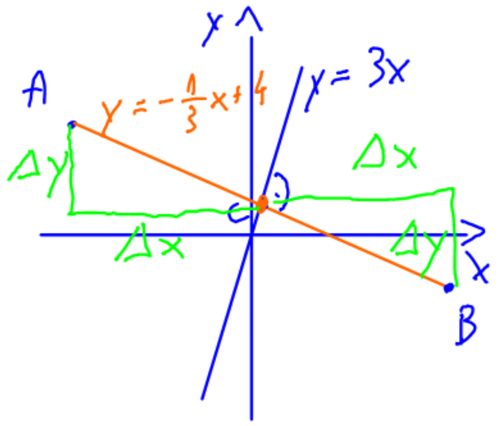
Długość boku Δ AKL wynosi 4.

5.16. (4 punkty)

Dany jest punkt $A = (-18, 10)$.

Prosta o równaniu $y = 3x$ jest symetralną odcinka AB.

Wyznacz współrzędne punktu B.



Równanie prostej AB:

$y = 3x$

$a_2 = -\frac{1}{a_1}$

$a_2 = -\frac{1}{3}$

$AB: \quad y = -\frac{1}{3}x + b$

$10 = -\frac{1}{3}(-18) + b$

$10 = 6 + b \quad /-6 \Rightarrow b = 4$

$AB: \quad y = -\frac{1}{3}x + 4$

Punkt C: $\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{1}{3}x + 4 \end{cases} \Rightarrow 3x = -\frac{1}{3}x + 4$

$3\frac{1}{3}x = 4$

$\frac{\cancel{10}^{5}}{3}x = \cancel{4}^{2}$

$\frac{5}{3}x = 2 \quad / \cdot \frac{3}{5}$

$x = \frac{3}{5} \cdot 2$

$x = \frac{6}{5}$

$y = 3 \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{5}$

$C\left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right)$

$\Delta x = \frac{6}{5} - -18 = 1\frac{1}{5} + 18 = 19\frac{1}{5}$

$x_B = \frac{6}{5} + 19\frac{1}{5} = 1\frac{1}{5} + 19\frac{1}{5} = 20\frac{2}{5} = \frac{102}{5}$

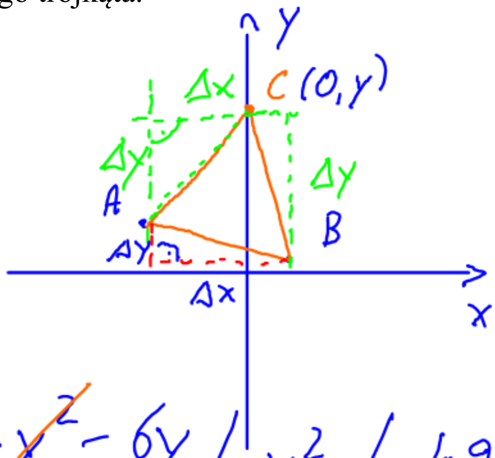
$\Delta y = 10 - \frac{18}{5} = \frac{50}{5} - \frac{18}{5} = \frac{32}{5}$

$y_B = \frac{18}{5} - \frac{32}{5} = -\frac{14}{5}$

$B\left(\frac{102}{5}, -\frac{14}{5}\right)$

5.17. (5 punktów)

Punkty $A = (-20, 12)$ i $B = (7, 3)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Wierzchołek C leży na osi $0y$ układu współrzędnych. Oblicz współrzędne wierzchołka C oraz obwód tego trójkąta.



$AC^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 =$

$= (-20-0)^2 + (12-y)^2$

$AC^2 = 400 + (12-y)^2$

$BC^2 = 7^2 + (3-y)^2$

$400 + 144 + \cancel{y^2} - 24y = 49 + 9 + \cancel{y^2} - 6y \quad / -y^2 \quad / -49-9 \quad / +24y$

$400 + 144 - 49 - 9 = 24y - 6y$

$486 = 18y \quad / : 18$

$\boxed{y = 27}$ $\qquad C = (0, 27)$

$Obw = AC + BC + AB = 2AC + AB$

$AC^2 = 400 + (12-y)^2 = 400 + (12-27)^2 = 400 + 15^2 =$

$= 400 + 225 = 625$

$AC = \sqrt{625} = 25$

$AB^2 = 27^2 + 9^2 = 729 + 81 = 810$

$AB = \sqrt{810} = \sqrt{81 \cdot 10} = 9\sqrt{10}$

$Obw = 2 \cdot 25 + 9\sqrt{10} = 50 + 9\sqrt{10}$

Obw. wynosi $50 + 9\sqrt{10}$.

5.18. (4 punkty)

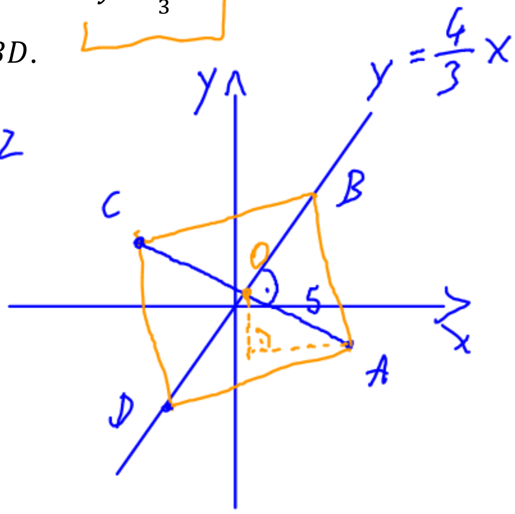
Dany jest kwadrat $ABCD$, w którym $A=\left(5,-\frac{5}{3}\right)$.

Przekątna BD tego kwadratu jest zawarta w prostej o równaniu $y=\frac{4}{3}x$.

Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych AC i BD.

Oblicz pole kwadratu $ABCD$.

$a_1 = \frac{4}{3}$



$y=a_1x+b_1 \qquad y=a_2x+b_2$

$a_2=-\frac{1}{a_1}$

$a_2=-\frac{3}{4}$

$y_{AC}=-\frac{3}{4}x+b$

$-\frac{5}{3}=-\frac{3}{4}\cdot 5+b \quad , \quad b=-\frac{5}{3}+\frac{15}{4}=\ldots$

$\ldots=-\frac{20}{12}+\frac{45}{12}=\frac{25}{12}=b$

$\begin{cases} y_{AC}=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{12} \\ y=\frac{4}{3}x \end{cases}$

$\frac{4}{3}x=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{12}$

$\frac{4}{3}x+\frac{3}{4}x=\frac{25}{12}$

$\frac{16}{12}x+\frac{9}{12}x=\frac{25}{12}$

$\cancel{\frac{25}{12}}^{1}x=\cancel{\frac{25}{12}}^{1} \quad /:\frac{25}{12}$

$\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=\frac{4}{3} \end{cases} \qquad O=\left(1,\frac{4}{3}\right)$

$OA^2=(1-5)^2+\left(\frac{4}{3}--\frac{5}{3}\right)^2$

$OA^2=16+\left(\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}}\right)^2$

$OA^2=16+9=25$

$OA=5 \implies AC=d=10$

$d=\sqrt{2}a$

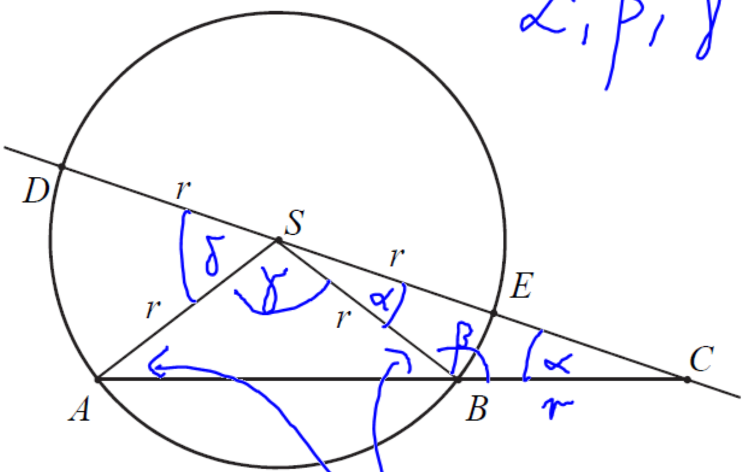
$a=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}=a$

$P_{\square}=a^2=\frac{100}{2}=50$

5.19. (2 punkty)

Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Na przedłużeniu cięciwy AB poza punkt B odłożono odcinek BC równy promieniowi danego okręgu. Przez punkty C i S poprowadzono prostą. Prosta CS przecina dany okrąg w punktach D i E (zobacz rysunek). Wykaż, że jeżeli miara kąta ACS jest równa α, to miara kąta ASD jest równa 3α.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$



$2\alpha + \beta = 180 \;/ -\beta$ $= 180 - \beta$

$\gamma + 2(180 - \beta) = 180$

$2\alpha = 180 - \beta$

$\gamma + 2 \cdot 2\alpha = 180$

$\alpha + \gamma + \delta = 180$

$\cancel{\alpha} + \cancel{\gamma} + \delta = \cancel{\gamma} + \overset{3\alpha}{\cancel{4\alpha}} \;/ -\gamma - \alpha$

$\boxed{\delta = 3\alpha}$

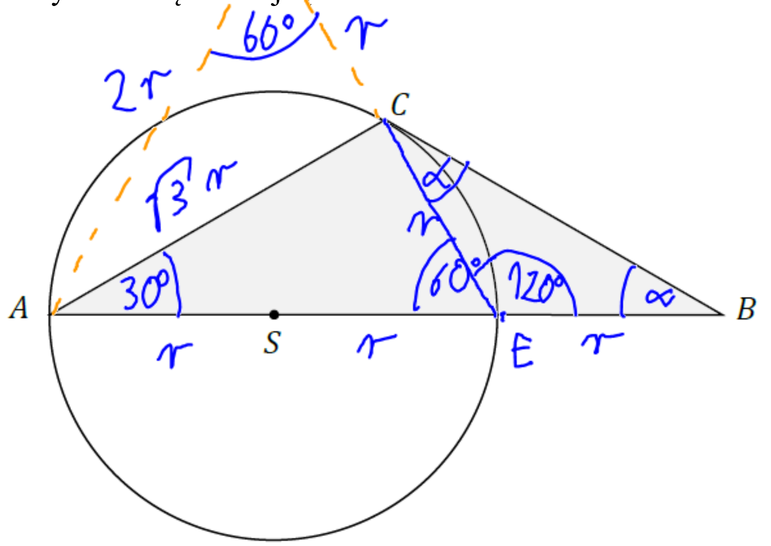
5.20. (4 punkty)

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r.

Środek S tego okręgu leży na boku AB tego trójkąta (zobacz rysunek).

Długości boków AB i AC są równe odpowiednio $|AB| = 3r$ oraz $|AC| = \sqrt{3}r$.

Oblicz miary wszystkich kątów trójkąta ABC.



$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$h = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cancel{2}a$

$h = \sqrt{3}a$

Trójkąt ADE jest równoboczny co widać z tego ↑.

$\sphericalangle CAE = 30^\circ$

$2\alpha + 120^\circ = 180^\circ \quad 2\alpha = 60^\circ \quad \alpha = 30^\circ$

$\sphericalangle CBA = 30^\circ$

$\sphericalangle ACB = 120^\circ$

MATPANDA

Odpowiada, podpowiada, ...

5.1. CKE 2020, 22, s. 10	c) 54
5.2. CKE 2022 VI, 18, s.10	a) $\frac{\lvert AD\rvert}{\lvert AB\rvert} = \frac{\lvert CD\rvert}{\lvert AC\rvert}$
5.3. Inf'23, 39, s. 90	d) 14
5.4. CKE 2022VI, 21, s.12	c) $15°$
5.5. CKE 2022, 20, s. 12	a) $30\sqrt{3}$
5.6. Inf'23, 40.1, s. 91	1-A, 2-F
5.7. Inf'23, 40.2, s. 92	a) $x_1 = 2 - \sqrt{7},\ x_2 = 2 + \sqrt{7}$
5.8. CKE 2016, 7, s. 2	d) $32°$
5.9. CKE 2020, 17, s. 8	d) $31°$
5.10. CKE 2017, 15, s. 8	c) $112°$
5.11. CKE 2017, 30, s. 20	Obwód trójkąta wynosi 60 cm.
5.12. CKE 2022, 33, s. 20	Miara kąta BAC jest równa 72°.
5.13. CKE 2010, 28	Długości boków AC i CB są równe (trójkąt ABC jest równoramienny). Długości boków CD i CE są równe (trójkąt DEC jest równoramienny). Miary kątów ACD i BCE są jednakowe i wynoszą $90° - \lvert\sphericalangle DCB\rvert$. Długość AD jest równa długości BE, ponieważ trójkąty ACD i BCE są przystające.
5.14. CKE 2019, 31, s. 19	Długość przekątnej $\lvert BD\rvert = 2\sqrt{17}$.
5.15. CKE 2021, 33, s. 20	Długość boku trójkąta AKL jest równa 4.
5.16. CKE 2019, 33, s. 22	Współrzędne punktu: $B = \left(\frac{102}{5}, -\frac{14}{5}\right)$.
5.17. CKE 2021, 35, s. 22	Punkt $C = (0, 27)$, obwód trójkąta wynosi $50 + 9\sqrt{10}$.
5.18. CKE 2020, 32, s. 20	$O = \left(1, \frac{4}{3}\right)$ jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD. $P_{ABCD} = 50$.
5.19. CKE 2019, 29, s. 17	Trójkąt CSB jest równoramienny; $\lvert\sphericalangle CBS\rvert = 180° - 2\alpha$ i $\lvert\sphericalangle ABS\rvert = 2\alpha$. Ponieważ $\lvert\sphericalangle ASB\rvert = 180° - 4\alpha$ i $\lvert\sphericalangle ASD\rvert + \lvert\sphericalangle ASB\rvert + \lvert\sphericalangle BSC\rvert = 180°$, to z $\lvert\sphericalangle ASD\rvert + 180° - 4\alpha + \alpha = 180°$ otrzymujemy $\lvert\sphericalangle ASD\rvert = 3\alpha$.
5.20. Inf.'23, 31, s. 66	$\lvert\sphericalangle CAB\rvert = 30°,\ \lvert\sphericalangle ABC\rvert = 30°,\ \lvert\sphericalangle BCA\rvert = 120°$