



www.matpanda.pl

Matematyka poziom spokojny

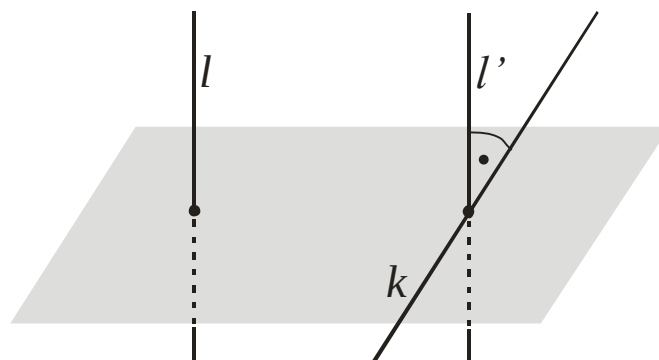
12. Stereometria TEORIA

Stereometria jest geometrią przestrzeni trójwymiarowej.

Wzajemne położenie prostych w przestrzeni:

- Proste równoległe leżą w jednej płaszczyźnie. Proste równoległe nie mają punktów wspólnych lub pokrywają się.
- Dwie proste przecinające się leżą w jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny.
- Dwie proste skośne nie leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych.

Prosta l jest **prostopadła** do prostej k , jeżeli istnieje prosta l' równoległa do prostej l , która przecina prostą k pod kątem prostym. Proste prostopadłe są skośne lub przecinają się.



Wzajemne położenie płaszczyzn w przestrzeni:

- Płaszczyzny równoległe nie mają punktów wspólnych lub pokrywają się.
- Jeżeli dwie płaszczyzny przecinają się, to ich częścią wspólną jest prosta.

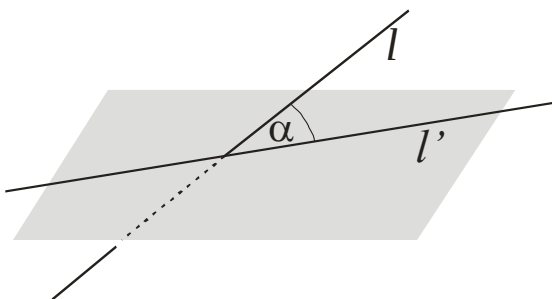
Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni:

- Prosta jest równoległa do płaszczyzny, jeżeli nie ma z tą płaszczyzną punktów wspólnych lub jest w tej płaszczyźnie zawarta.
- Prosta przecina płaszczyznę, jeżeli ma z tą płaszczyzną dokładnie jeden punkt wspólny.
- Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, jeżeli jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie.

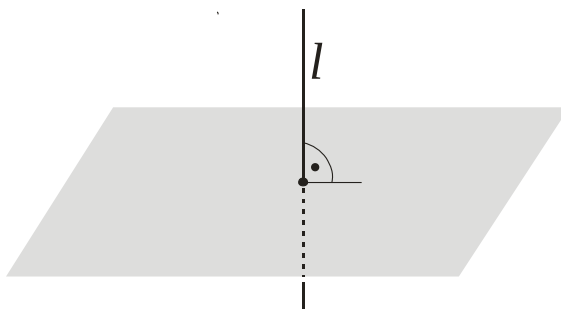
Dla dowolnego punktu S w przestrzeni możemy poprowadzić prostą l przechodzącą przez ten punkt i prostopadłą do płaszczyzny P . Punkt przecięcia prostej l z płaszczyzną P nazywamy **rzutem prostokątnym punktu S** na płaszczyznę P . Rzutem prostokątnym prostej na płaszczyznę jest prosta składająca się z rzutów prostokątnych wszystkich punktów tej prostej.

Kątem między prostą l a płaszczyznę P jest:

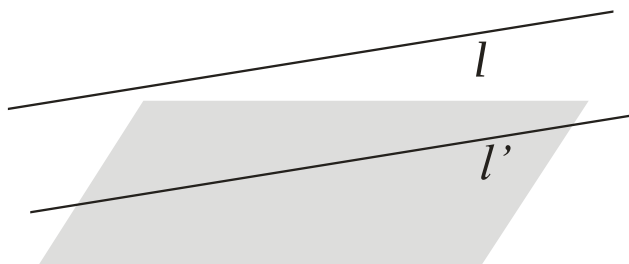
- kąt ostry, który prosta l tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na płaszczyznę P ;



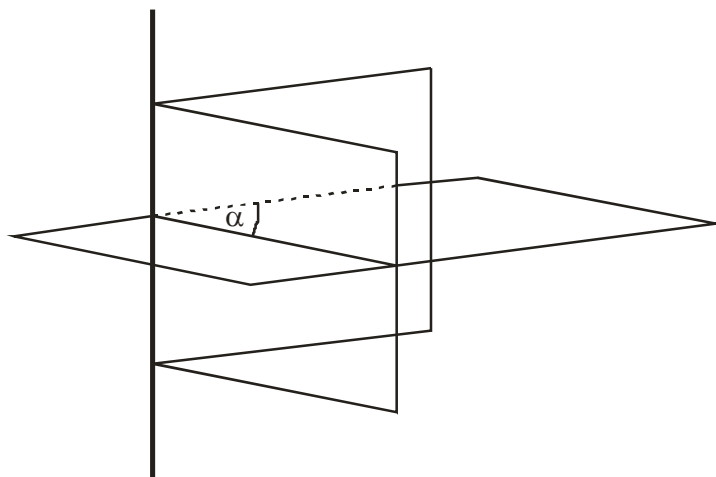
- kąt prosty, jeżeli rzutem prostej l na płaszczyznę P jest jeden punkt;



- kąt 0° , jeżeli prosta l jest równoległa do płaszczyzny P .

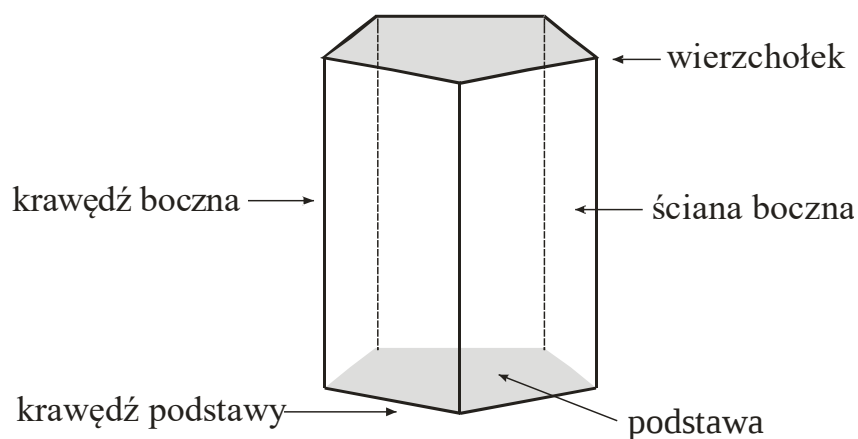


Kątem dwuściennym nazywamy każdą z dwóch części przestrzeni, na jakie dzieli ją dwie półpłaszczyzny (*ściany kąta dwuściennego*) posiadające wspólną krawędź. *Miara kąta dwuściennego* jest to miara kąta płaskiego, będącego częścią wspólną kąta dwuściennego oraz płaszczyzny prostopadłej do krawędzi kąta dwuściennego.



Bryły

Graniastosłupem nazywamy bryłę, której podstawami są dwa przystające wielokąty zawarte w równoległych do siebie płaszczyznach, a krawędzie boczne są do siebie równoległe.



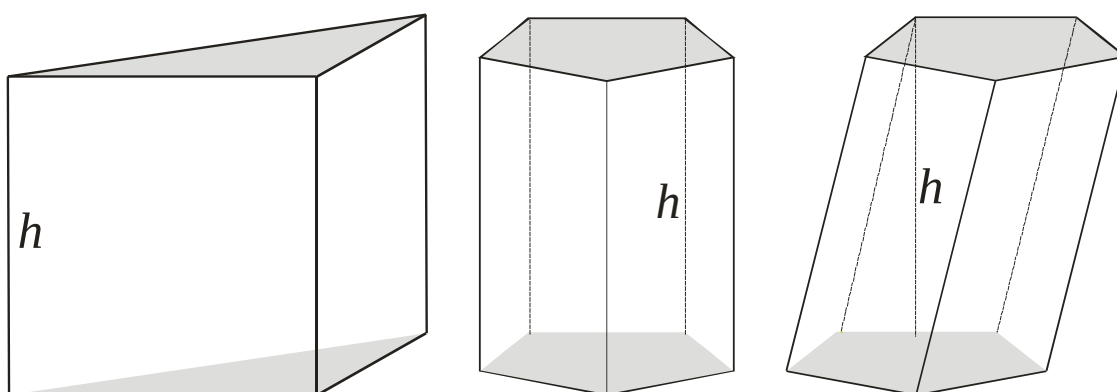
Nazwę graniastosłupa (np. trójkątny, czworokątny) tworzymy od nazwy wielokąta podstawy.

Graniastosłup nazywamy *prostym*, jeżeli jego krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw. Ściany boczne graniastosłupa prostego są prostokątami.

Graniastosłup nazywamy:

- *prawidłowym*, jeżeli jest on prosty, a jego podstawą jest wielokąt foremny.
- *pochyłym*, jeżeli jego krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw.

Ściany boczne dowolnego graniastosłupa są równoległobokami.



Wysokością graniastosłupa nazywamy dowolny odcinek łączący płaszczyzny zawierające podstawy graniastosłupa i prostopadły do tych podstaw. Krawędź boczna graniastosłupa prostego jest jego wysokością.

Przekątną graniastosłupa nazywamy taki odcinek łączący dwa wierzchołki, który nie jest zawarty w żadnej ścianie graniastosłupa.

Objętość dowolnego graniastosłupa wyraża się wzorem

$$V = P_p \cdot h$$

(P_p jest polem powierzchni podstawy; h jest wysokością graniastosłupa).

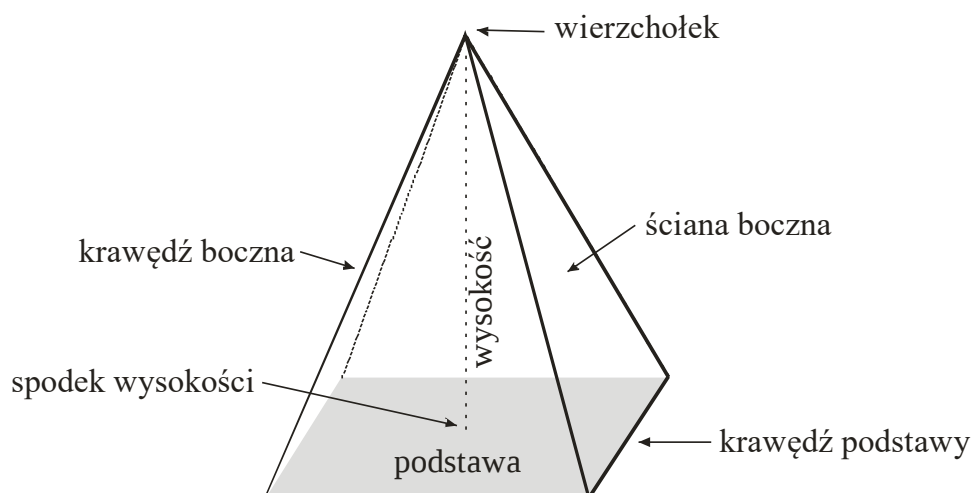
Prostopadłościanem nazywamy graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt.

Objętość prostopadłościanu o krawędziach a, b, c wyraża się wzorem $V = a \cdot b \cdot c$.

Sześcianem nazywamy prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są równe.

Objętość sześcianu o krawędziach a wyraża się wzorem $V = a^3$.

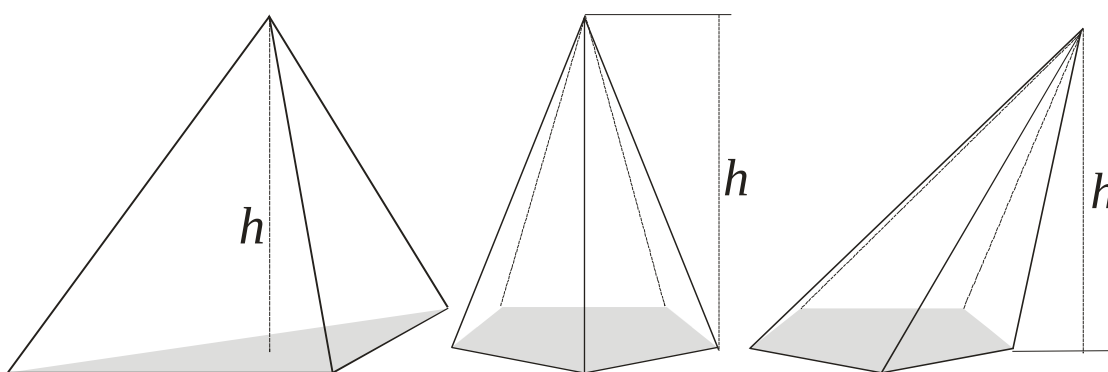
Ostrosłupem nazywamy bryłę, której jedna ściana, zwana podstawą, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany (ściany boczne) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.



Nazwę ostrosłupa (np. trójkątny, czworokątny, itd.) tworzymy od wielokąta podstawy.

Ostrosłup nazywamy *prawidłowym*, jeżeli jego podstawą jest wielokąt foremny, a rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy (tzw. *spodek wysokości*) pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

Ostrosłup nazywamy *prostym*, jeżeli wszystkie jego krawędzie boczne mają tę samą długość. *Czworościanem foremnym* nazywamy ostrosłup prawidłowy, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.



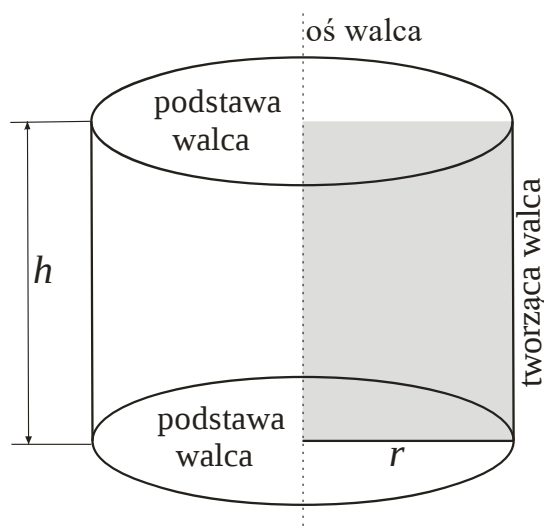
Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z rzutem prostokątnym wierzchołka na płaszczyznę podstawy.

Objętość dowolnego ostrosłupa wyraża się wzorem

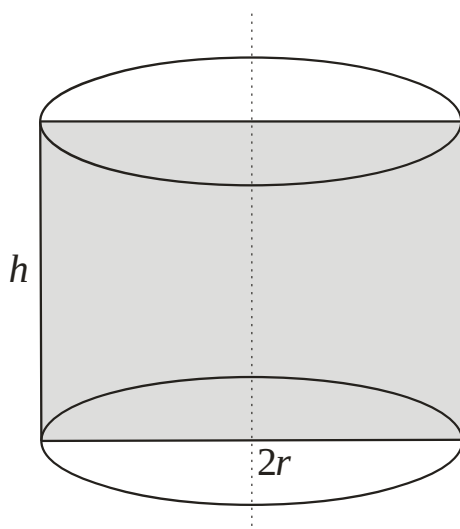
$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

(P_p jest polem powierzchni podstawy; h jest wysokością ostrosłupa).

Walec jest bryłą otrzymaną przez obrót prostokąta wokół prostej (tzw. *osi walca*), zawierającej jego bok. Podstawami walca są koła o jednakowych promieniach.



Tworzącą walca nazywamy dowolny odcinek łączący brzegi podstaw walca i prostopadły do tych podstaw. *Wysokością walca* nazywamy dowolny odcinek łączący podstawy walca i do nich prostopadły.



Przekrojem osiowym walca nazywamy przekrój walca płaszczyzną zawierającą jego oś. W takim przekroju powstaje prostokąt o bokach h i $2r$.

Pole powierzchni całkowitej walca P_c wyraża się wzorem

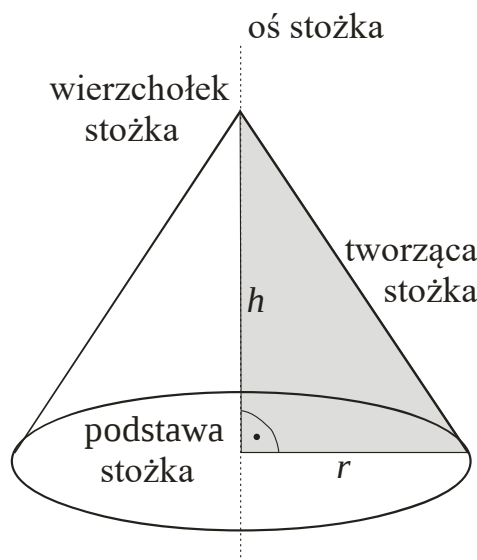
$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

objętość walca V wyraża się wzorem

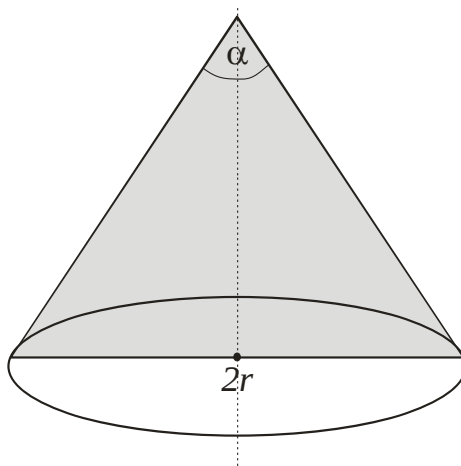
$$V = \pi r^2 h$$

(r jest promieniem podstawy walca; h jest wysokością walca).

Stożek jest bryłą otrzymaną przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej (osi stożka), zawierającej przyprostokątną tego trójkąta. *Wysokością stożka* nazywamy odcinek łączący wierzchołek stożka ze środkiem podstawy. *Tworzącą stożka* nazywamy dowolny odcinek łączący wierzchołek stożka z brzegiem podstawy. Podstawą stożka jest koło.



Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś. W takim przekroju powstaje trójkąt równoramienny. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy *kątem rozwarcia stożka*.



Pole powierzchni bocznej P_b stożka wyraża się wzorem

$$P_b = \pi r l$$

pole powierzchni całkowitej P_c stożka jest sumą pól powierzchni bocznej P_b i podstawy P_p

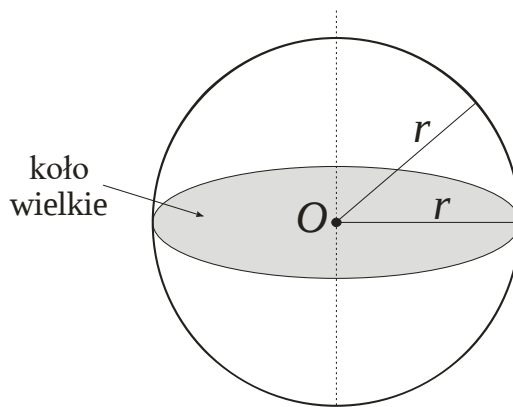
$$P_c = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi r l$$

objętość stożka wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

(r jest promieniem podstawy stożka; l jest tworzącą stożka; h jest wysokością stożka).

Kulą o środku w punkcie O i promieniu r nazywamy zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r . Kulę oznaczamy przez $K(O, r)$.



Sferą o środku w punkcie O i promieniu r nazywamy zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r . Sferę oznaczamy przez $S(O, r)$.

Każdy przekrój kuli płaszczyzną, która ma więcej niż jeden punkt wspólny z tą kulą, jest kołem.

Kołem wielkim nazywamy przekrój kuli płaszczyzną przechodzącą przez środek tej kuli.

Pole powierzchni kuli o promieniu r wyraża się wzorem

$$P = 4\pi r^2$$

Objętość kuli o promieniu r wyraża się wzorem

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Dwie bryły są *podobne*, jeżeli odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiednimi punktami drugiej bryły. Stosunek odległości między odpowiednimi punktami figur podobnych nazywamy *skalą podobieństwa*.

Jeżeli dwie bryły są podobne i skala podobieństwa między tymi bryłami jest równa k , to:

- stosunek pól powierzchni tych brył jest równy k^2 ,
- stosunek objętości tych brył jest równy k^3 .