

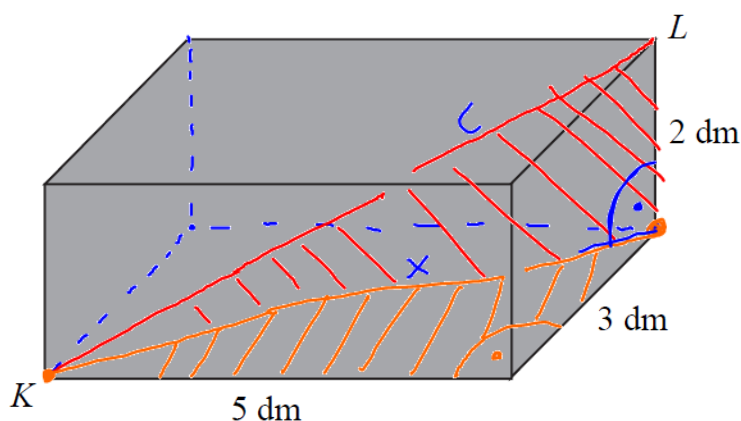
Matematyka poziom spokojny

12. Stereometria ZADANIA

ZADANIA ZAMKNIĘTE

12.1. (1 punkt)

Pudełko w kształcie prostopadłościanu ma wymiary $5 \text{ dm} \times 3 \text{ dm} \times 2 \text{ dm}$ (zob. rys.).



Przekątna KL tego prostopadłościanu jest – z dokładnością do $0,01 \text{ dm}$ – równa

a) $5,83 \text{ dm}$

b) $6,16 \text{ dm}$

c) $3,61 \text{ dm}$

d) $5,39 \text{ dm}$

$$5^2 + 3^2 = x^2$$

$$x^2 = 25 + 9$$

$$x^2 = 34$$

$$x^2 + 2^2 = c^2$$

$$34 + 4 = c^2$$

$$c^2 = 38$$

$$c = \sqrt{38} = 6,16$$

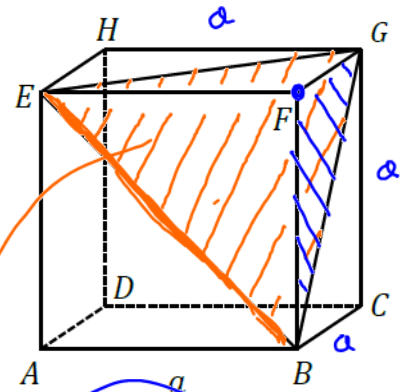
$$6^2 = 36$$

12.2. (1 punkt)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a .

Punkty E, F, G, B są wierzchołkami ostrosłupa $EFGB$

(zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $EFGB$ jest równe



a) a^2

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$

c) $\frac{3}{2} \cdot a^2$

d) $\frac{3+\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$

$\sqrt{2}a$

$$P_b = 3 \cdot \frac{a^2}{2} = \left[\frac{3}{2} a^2 \right]$$

$$\rightarrow P_p = \frac{1}{2} \sqrt{2}a \cdot h$$

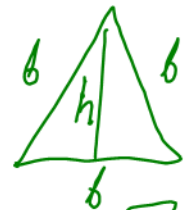
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2}a$$

$$\rightarrow P_p = \frac{1}{2} \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2}a =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{3} a^2 =$$

$$P_p = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$P_c = \frac{3}{2} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{a^2}{2} (3 + \sqrt{3})$$



$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} b$$

PLANI...

12.3. (1 punkt)

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o przekątnych długości 7 cm i 10 cm.

Wysokość tego graniastosłupa jest krótsza od dłuższej przekątnej rombu o 2 cm.

Wtedy objętość graniastosłupa jest równa

a) 560 cm^3

b) 280 cm^3

c) $\frac{280}{3} \text{ cm}^3$

d) $\frac{560}{3} \text{ cm}^3$

$$10 - 2 = 8 \text{ cm} = h$$

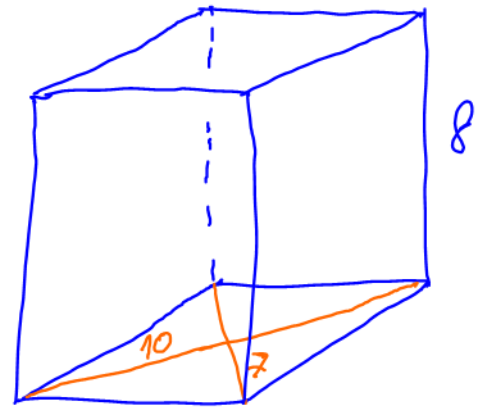
$$P_{\square} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot e$$

PRZEKĄTNE ROMBU

$$V = P_{\square} \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot d \cdot e \cdot h =$$

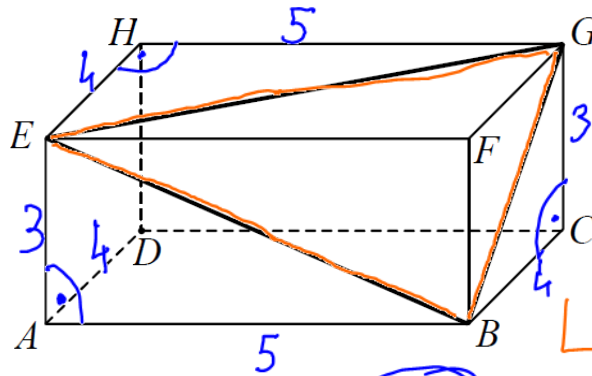
$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \cdot 8 = 10 \cdot 7 \cdot 4 =$$
$$= 10 \cdot 28 = 280 \text{ cm}^3$$



12.4. (1 punkt)

W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$.

Który z odcinków AB , BG , GE , EB jest najdłuższy?



$$\begin{aligned} BG &= ? \\ BG^2 &= 3^2 + 4^2 = \\ &= 9 + 16 = 25 \end{aligned}$$

a) AB

b) BG

c) GE

d) EB

$$\begin{aligned} EB &= ? \\ 3^2 + 5^2 &= EB^2 \\ EB^2 &= 9 + 25 = 34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EG &= ? \\ EG^2 &= 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = \\ EG^2 &= 41 \end{aligned}$$

12.5. (1 punkt)

$$P = 54$$

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54.

Długość przekątnej tego sześcianu jest równa

a) $\sqrt{6}$

b) 3

c) 9

d) $3\sqrt{3}$

$$P_{\text{sześcian}} = 54$$
$$P_{\text{sześcian}} = 6 \cdot a^2$$

$$6 \cdot a^2 = 54 \quad / : 6$$
$$a^2 = \frac{54}{6} = 9 \quad / \sqrt{}$$

$$\rightarrow a = 3$$

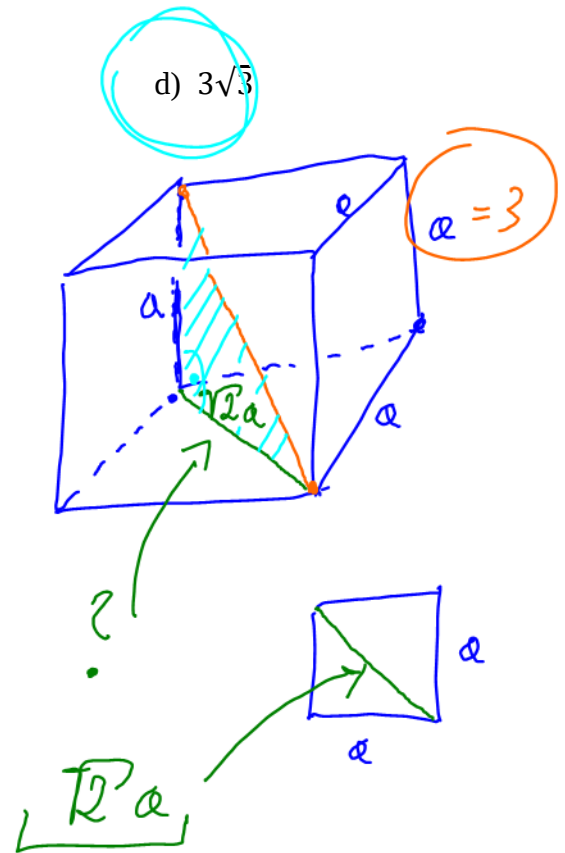
$$d^2 = a^2 + (\sqrt{2}a)^2$$

$$d^2 = a^2 + 2a^2$$

$$d^2 = 3a^2 \quad / \sqrt{}$$

$$d = \sqrt{3}a$$

$$d = \sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$$



12.6. (1 punkt)

Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa

a) 124π

b) 96π

c) 64π

d) 32π

$$r = 6$$

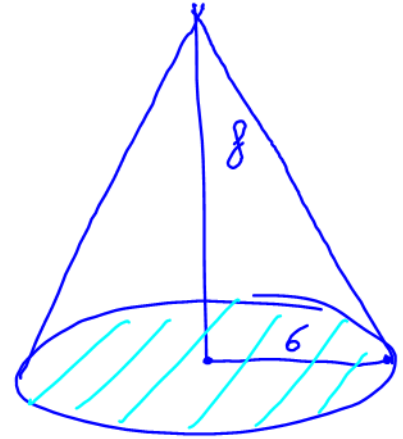
$$V = ?$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h =$$

$$= \frac{1}{3} \pi 6^2 \cdot 8 =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot 36 \cdot 8 =$$

$$= \pi \cdot 12 \cdot 8 = 96\pi$$



12.7. (1 punkt)

k

$$k = 42$$

Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest równa 42.

Liczba wszystkich wierzchołków tego graniastosłupa jest równa

a) 14

b) 28

c) 15

d) 42

$n =$ liczba kątów podstawy

$$k = ?$$

$$w = ?$$

$$k = n + n + n = 3n$$

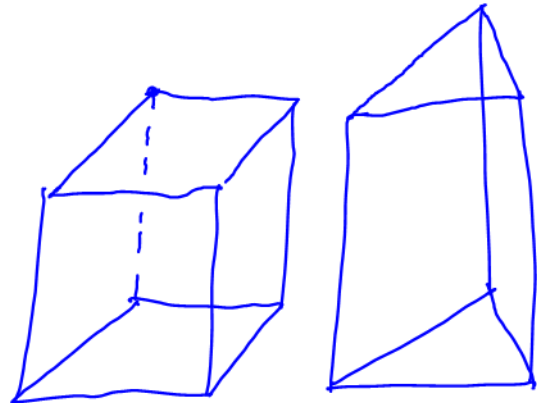
$$42 = 3n \quad |:3$$

$$n = 14$$

$$w = ?$$

$$14 + 14 + 14 = 42$$

$$w = 14 + 14 = 28$$



12.8. (1 punkt)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie mają długość 8.

Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe

a) $64\sqrt{3}$

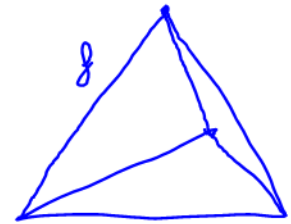
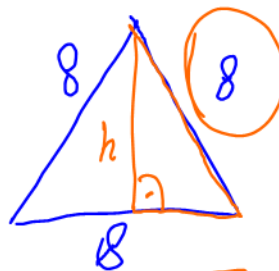
b) $64\sqrt{2}$

c) $16\sqrt{3}$

d) $16\sqrt{2}$

$$P = ?$$

$$\rightarrow P = 4 \cdot P_{\Delta}$$
$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h$$



$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} a = h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$P_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$P = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$P = \sqrt{3} a^2$$

$$P = \sqrt{3} \cdot 8^2 = 64\sqrt{3}$$

12.9. (1 punkt)

Z wierzchołków sześcianu $ABCDEFGH$ losujemy jednocześnie dwa różne wierzchołki. Prawdopodobieństwo tego, że wierzchołki te będą końcami przekątnej sześcianu $ABCDEFGH$, jest równe

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{4}{7}$

c) $\frac{1}{14}$

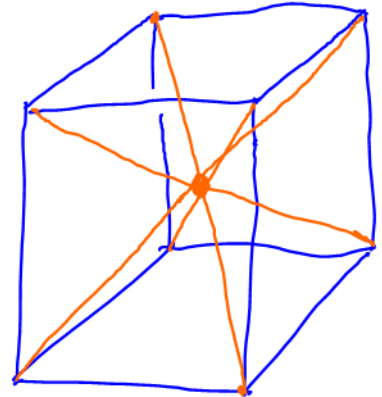
d) $\frac{3}{7}$

$P = \frac{A}{\Omega} \leftarrow ?$ $AB = BA$

$\Omega = \frac{48 \cdot 7}{2} = 28$

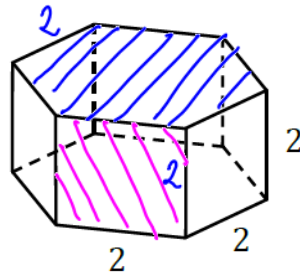
$A = ?$ $A = 4$

$P = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$



12.10. (1 punkt)

Każda krawędź graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość równą 2 (zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe



a) $24 + 2\sqrt{3}$

b) $24 + 6\sqrt{3}$

c) $24 + 12\sqrt{3}$

d) $24 + 24\sqrt{3}$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$



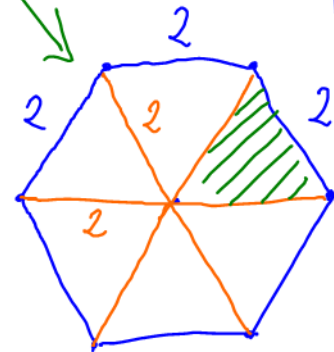
$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} a h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$P_p = 6 \cdot P_{\Delta} = 6\sqrt{3}$$

$$P_{\square} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$P_b = 6 P_{\square} = 6 \cdot 4 = 24$$

$$P_c = P_b + 2 P_p = 24 + 2 \cdot 6\sqrt{3} = 24 + 12\sqrt{3}$$



• 6

→ ZADANIE 5

12.11. (1 punkt)

Przekątna sześcianu jest równa 6. Wynika stąd, że objętość tego sześcianu jest równa

a) $24\sqrt{3}$

b) 72

c) $54\sqrt{2}$

d) $648\sqrt{3}$

$V = ?$

→ $\boxed{d = 6}$
 $a = ?$

$$a^2 + (\sqrt{2}a)^2 = d^2$$

$$a^2 + 2a^2 = d^2$$

$$d^2 = 3a^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\boxed{d = \sqrt{3}a}$$

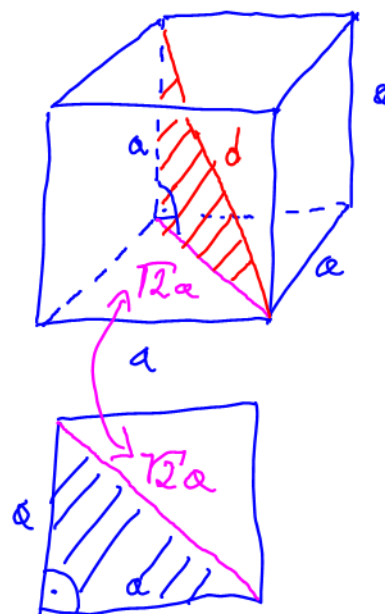
$$6 = \sqrt{3}a \quad | : \sqrt{3}$$

$$a = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$V = a^3 = (2\sqrt{3})^3 = 2^3 \sqrt{3}^3 =$$

$$= 8 \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 3} = 8 \sqrt{3^2 \cdot 3} = 8 \sqrt{3^2} \sqrt{3} =$$

$$= 8 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \boxed{24\sqrt{3}}$$



12.12. (1 punkt)

Przekątna sześcianu ma długość $4\sqrt{3}$. Pole powierzchni tego sześcianu jest równe

a) 96

b) $24\sqrt{3}$

c) 192

d) $16\sqrt{3}$

$d = 4\sqrt{3}$

$d = \sqrt{3} \cdot a$

$4\sqrt{3} = \sqrt{3} a \quad / : \sqrt{3}$

$a = 4$

$P = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot (4)^2 = 6 \cdot 16 = 96$

kąt ma być w płaszczyźnie prostopadłej

ZADANIA ZAMKNIĘTE / OTWARTE

12.13.

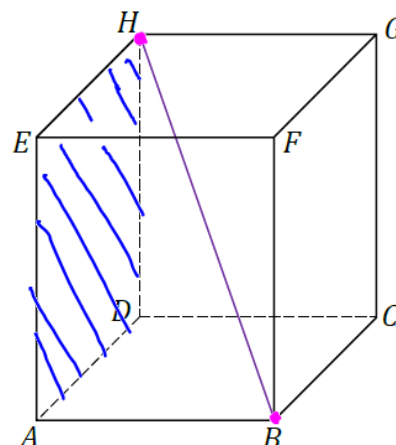
Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$, w którym prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są jego podstawami.

Odcinek BH jest przekątną tego prostopadłościanu.

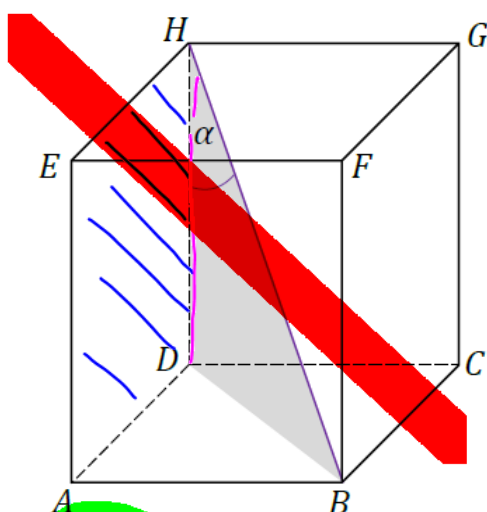
12.13a. (1 punkt)

Na którym rysunku prawidłowo narysowano, oznaczono i podpisano kąt α pomiędzy przekątną BH prostopadłościanu a jego ścianą boczną $ADHE$?

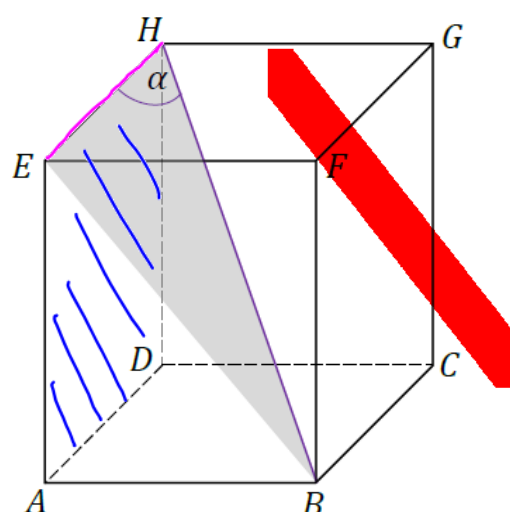
Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.



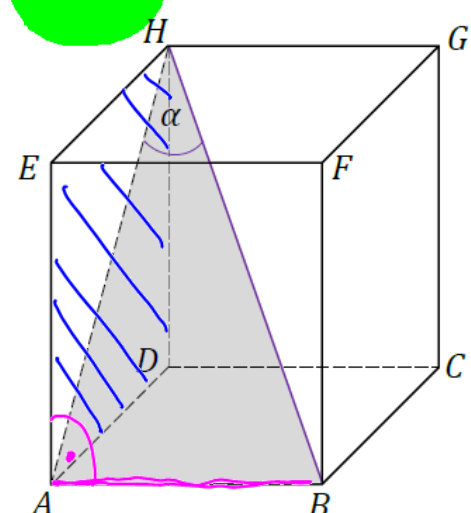
A. $\alpha = \angle BHD$



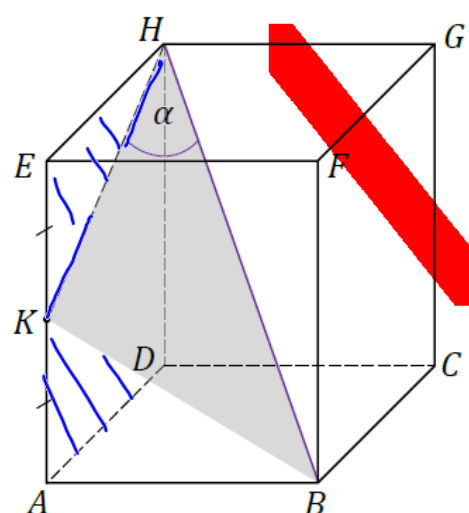
B. $\alpha = \angle BHE$



C. $\alpha = \angle BHA$



D. $\alpha = \angle BHK$



12.13b. (4 punkty)

W prostokącie $ABCDEFGH$ dane są:

→ $\operatorname{tg} \beta = \frac{9}{7}$

→ $x = |BG| = 2 \cdot \sqrt{130}$

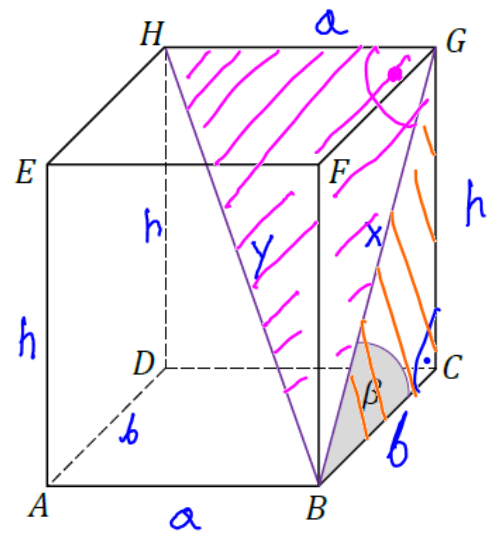
→ $y = |BH| = 2 \cdot \sqrt{194}$

Odcinek BH jest przekątną prostokąta.

Odcinek BG jest przekątną ściany bocznej $BCGF$.

β jest miarą kąta $\angle GBC$. Sytuację ilustruje rysunek.

Oblicz pole powierzchni całkowitej prostokąta $ABCDEFGH$.



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{9}{7} = \frac{h}{b}$$

$$7h = 9 \cdot b \quad | :7$$

$$h = \frac{9}{7} b$$

$$x^2 = b^2 + h^2$$

$$4 \cdot 130 = b^2 + h^2$$

$$520 = b^2 + h^2$$

$$x^2 = x^2 + a^2$$

$$4 \cdot 194 = x^2 + a^2$$

$$776 = x^2 + a^2$$

$$776 = 520 + a^2$$

$$a^2 = 256 \quad | \sqrt{}$$

$$a = 16$$

$$h = \frac{9}{7} \cdot 14 = 18$$

$$h = 18$$

$$520 = b^2 + \left(\frac{9}{7}b\right)^2$$

$$520 = b^2 + \frac{81}{49}b^2$$

$$520 = b^2 \left(1 + \frac{81}{49}\right)$$

$$520 = b^2 \frac{49 + 81}{49}$$

$$520 = b^2 \frac{130}{49} \quad | \cdot \frac{49}{130}$$

$$b^2 = 520 \cdot \frac{49}{130} = 196 \quad | \sqrt{}$$

$$b = 14$$

$$P = 2a \cdot h + 2b \cdot h + 2ab$$

12.14. (1 punkt)

Dane są dwa prostopadłościany podobne: B_1 oraz B_2 . Objętość prostopadłościanu B_1 jest równa V , a objętość prostopadłościanu B_2 jest równa $27V$. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu B_1 jest równe P .

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu B_2 jest równe

A.	$27P$	ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy	1.	stosunkowi objętości tych prostopadłościanów.
<u>B.</u>	$9P$		2.	pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku objętości tych prostopadłościanów.
C.	$3\sqrt{3}P$		<u>3.</u>	kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.

$$\boxed{V \sim x^3} \quad \boxed{P \sim x^2}$$

$$x_2 = 3 x_1$$

$$\boxed{P_2 = 9 P_1}$$

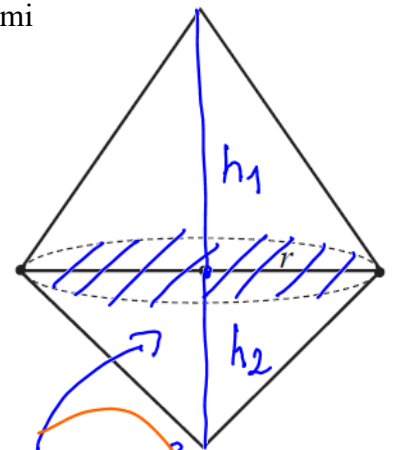
12.15. (2 punkty)

Dwa stożki o takich samych podstawach połączone podstawami w taki sposób jak na rysunku przedstawionym obok.

Stosunek wysokości tych stożków jest równy 3:2.

Objętość stożka o krótszej wysokości jest równa 12 cm^3 .

Oblicz objętość bryły utworzonej z połączonych stożków.



$$\rightarrow \left[\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{2} \right] \quad \left[V = \frac{1}{3} P_p \cdot h \right]$$

$$V_1 = \frac{1}{3} P_p \cdot h_1$$

$$V_2 = \frac{1}{3} P_p \cdot h_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} P_p h_1}{\frac{1}{3} P_p h_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2} \quad / \cdot V_2$$

$$V_1 = \frac{3}{2} \cdot V_2 = \frac{3}{2} \cdot 12 \text{ cm}^3 = 18 \text{ cm}^3 = V_1$$

$$V = V_1 + V_2 = 18 \text{ cm}^3 + 12 \text{ cm}^3 = 30 \text{ cm}^3$$

Obj. Objętość bryły wynosi 30 cm^3 .

12.16. (4 punkty)

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC .

Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa.

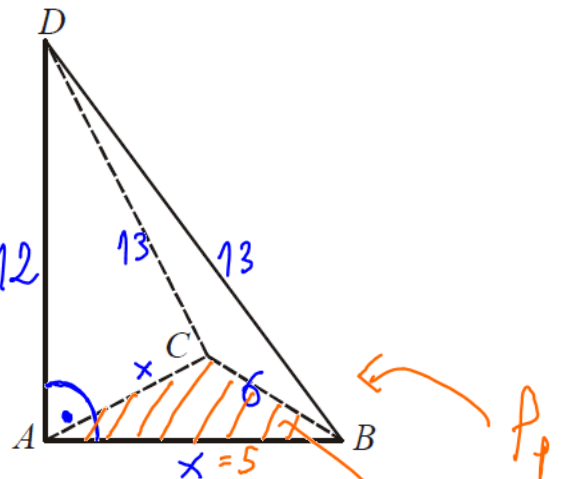
Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$,

jeśli wiadomo, że:

$$|AD| = 12$$

$$|BC| = 6$$

$$|BD| = |CD| = 13$$



$$x^2 + 12^2 = 13^2$$

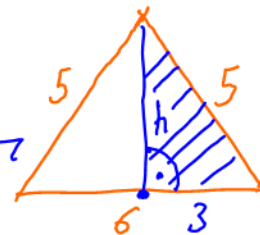
$$x^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 \quad \sqrt{\quad}$$

$$x = 5$$

$$h^2 + 3^2 = 5^2 \quad | - 3^2$$

$$h^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \quad \sqrt{\quad}$$

$$h = 4$$



$$P_f = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_f \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$$

Op. Objętość ostrosłupa wynosi 48.

12.17. (4 punkty)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej prostopadła do krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, a pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

$$P_b = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot P_{\Delta} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4} \quad | : \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$15 = \frac{15}{2} a \quad | : 15 \cdot 2 \Rightarrow a = 2$$

$$h_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{3} h = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$H^2 + x^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4} \right)^2$$

$$H^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4} \right)^2$$

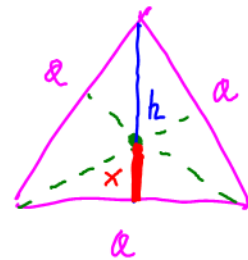
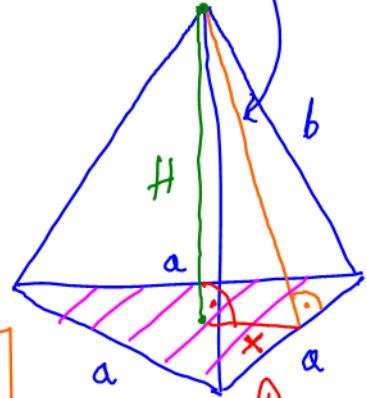
$$H^2 = \frac{25 \cdot 3}{16} - \frac{3}{9} = \frac{75}{16} - \frac{1}{3} = \frac{225 - 16}{48} = \frac{209}{48}$$

$$H = \frac{\sqrt{209}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} P_{\Delta} \cdot H = \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{209}}{12}$$

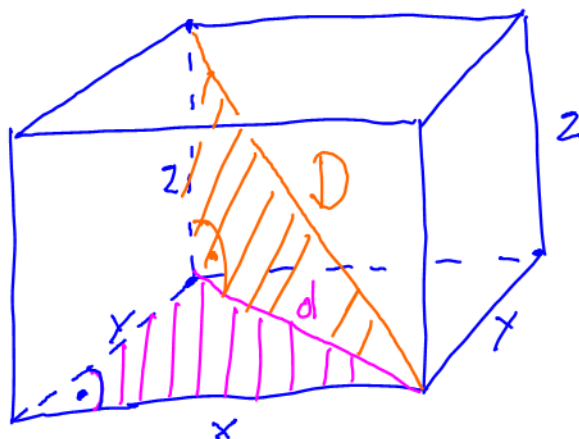
Obj. Objętość wynosi $V = \frac{\sqrt{209}}{12}$.



12.18. (4 punkty)

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 198. Stosunki długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka prostopadłościanu to 1 : 2 : 3. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} & , & \frac{y}{z} = \frac{2}{3} \\ 198 = 2xy + 2yz + 2xz \\ y = 2x & , & 2z = 3y \quad | :2 \\ z = 3x & & z = \frac{3}{2}y \\ & & z = \frac{3}{2} \cdot 2x \end{cases}$$



$$198 = 2x \cdot 2x + 2 \cdot 2x \cdot 3x + 2x \cdot 3x$$

$$198 = 4x^2 + 12x^2 + 6x^2$$

$$198 = 22x^2 \quad | :22$$

$$x^2 = \frac{198}{22} = 9 \quad | \sqrt{} \Rightarrow \boxed{x=3} \quad \boxed{y=6} \quad \boxed{z=9}$$

$$x^2 + y^2 = d^2$$

$$9 + 36 = d^2$$

$$d^2 = 45$$

$$d^2 + z^2 = D^2$$

$$D^2 = 45 + 81 = 126 \quad | \sqrt{}$$

$$D = \sqrt{126} = \sqrt{9 \cdot 14} = 3\sqrt{14} \quad !$$

Długość przekątnej wynosi $D = 3\sqrt{14}$.



Odpowiada, podpowiada, ...

zadanie	rozwiązanie
12.1 CKE 2019, 21, s. 10	b) 6,16 dm
12.2 CKE 2022, 26, s. 14	d) $\frac{3+\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$
12.3 CKE 2022, 25, s. 14	b) 280 cm ³
12.4 CKE 2011, 15, s. 6	c) GE
12.5 CKE 2011, 20, s. 8	d) $3\sqrt{3}$
12.6 CKE 2011, 21, s. 8	b) 96π
12.7 CKE 2022VI, 24, s. 12	b) 28
12.8 CKE 2022VI, 25, s. 14	a) $64\sqrt{3}$
12.9 CKE 2021, 26, s. 14	a) $\frac{1}{7}$
12.10 CKE 2021VII, 24, s. 14	c) $24 + 12\sqrt{3}$
12.11 CKE 2021VII, 25, s. 14	a) $24\sqrt{3}$
12.12 CKE 2020, 24, s. 12	a) 96
12. 13a CKE Inf ² 23, 43.1, s. 99	C. kąt BHA
12. 13b CKE Inf ² 23, 43.2, s. 100	Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$ wynosi 1528.
12.14 CKE Inf ² 23, 44, s. 103	B.3.
12.15 CKE 2020, 25, s. 12	Objętość bryły wynosi 30 cm ³ .
12.16 CKE 2010, 32, s. 14	Objętość ostrosłupa wynosi 48.
12.17 CKE 2017, 34, s. 24	Objętość ostrosłupa $V = \frac{\sqrt{209}}{12}$.
12.18 CKE 2014, 32, s. 16	Długość przekątnej prostopadłościanu wynosi $3\sqrt{14}$.